SET–B

(2013–14)

गणित

(MATHEMATICS)

(Hindi & English Version)

Time : 3 Hours Maximum Marks : 100

निर्देश :

(i) सभी प्रश्न अनिवार्य है।

(ii) प्रश्न पत्र में दिये गये निर्देश सावधानीपूर्वक पढ़कर प्रश्नों के उत्तर लिखिये।

(iii) दिये गये प्रश्न 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न है जिनके अन्तर्गत सही विकल्प का चयन, सत्य/असत्य, सही जोड़े बनाना, एक वाक्य में उत्तर तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति करना है, प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

(iv) प्रश्न क्रमांक 6 से 24 में आन्तरिक विकल्प दिये गये हैं।

(v) प्रश्न क्रमांक 6 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न पर दो अंक आवंटित है।

(vi) प्रश्न क्रमांक 11 से 17 तक प्रत्येक प्रश्न पर 4 अंक आवंटित है।

(vii) प्रश्न क्रमांक 18 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न पर 5 अंक आवंटित है।

(viii) प्रश्न क्रमांक 23 से 24 तक प्रत्येक प्रश्न पर 6 अंक आवंटित है।

Note :

(i) All question are compulsory.

(ii) Read the instructions of question paper carefully and write their answer.

(iii) Question No. 1 to 5 are objective types which contain. Choose the correct answer True/False, match the column, one sentence and fill in the blanks, each question is allotted 5 marks.

(iv) Internal options are given in Q. Nos. 6 to 24.

(v) Q. Nos. 6 to 10 carry 2 marks each.

(v) Q. Nos. 11 to 17 carry 4 marks each.

(v) Q. Nos. 18 to 22 carry 5 marks each.

(v) Q. Nos. 23 to 24 carry 6 marks each.

1. सही विकल्प चुनकर लिखिये : 5 अंक

Choose the correct Answer.

(अ) $\frac{1}{(x+4)(x+6)}$ की आंशिक भिन्न होगी–

(i) $\frac{1}{2(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$ (ii) $\frac{1}{5(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$

(iii) $\frac{1}{3(x+4)} + \frac{5}{3(x+6)}$ (iv) $\frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{(x+6)}$

Partial fraction of $\frac{1}{(x+4)(x+6)}$ is :

(i) $\frac{1}{2(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$ (ii) $\frac{1}{5(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$

(iii) $\frac{1}{3(x+4)} + \frac{5}{3(x+6)}$ (iv) $\frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{(x+6)}$

(ब) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ का मान होगा–

(i) π (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{3}$

Value of $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ will be :

(i) π (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{3}$

(स) समतलों $3x - 4y + 5z = 0$ तथा $2x - y - 2z = 5$ के बीच का कोण हैं–

(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) None of these

Angle between the planes $3x - 4y + 5z = 0$ and $2x - y - 2z = 5$ is :

(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) None of these

(द) सदिशों $2i + 3j + k$ तथा $2i - j - k$ के बीच का कोण हैं–

(i) 0 (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{\pi}{2}$

Angle between the Vactors $2i + 3j + k$ and $2i - j - k$ is :

(i) 0 (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{\pi}{2}$

(इ) $\cos^{-1}x$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा–

(i) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (iii) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (iv) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

What will be the differential cofficient of $\cos^{-1}x$ with respect to x :

(i) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (iii) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (iv) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2. खाली स्थान भरिये– 5 अंक

(अ) समतल $ax + by + cz + d = 0$ के अभिलम्ब के दिक् अनुपात ..... होंगे

(ब) दो अशून्य सदिश $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ समान्तर होंगे यदि और केवल यदि .....

..

(स) $\sin x$ का अवकल गुणांक ..... होगा

(द) यदि विस्थापन $s = 3t - t^3$ हो तो उसका वेग ..... होगा

(इ) $\int \frac{1}{x} dx$ = ...

Fill in the blanks :

(a) Direction ratio of normal of plane
$ax + by + cz + d = 0$ is .....

(b) Two non zero Vactors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are parallel if and only if .....

(c) Differential coefficient of $\sin x$ is .....

(d) If displacement is $s = 3t - t^3$ their its velocity is .....

(e) $\int \frac{1}{x} dx$ = ...

3. सही जोड़ियाँ बनाइये– 5 अंक

I	II
(अ) बिन्दु (2, 3, 4) की yz– समतल से दूरी	(i) –1
(ब) यदि $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ के स्थिति सदिश क्रमशः $3i + 5j - 7k$ तथा $3i - 4j + k$ हो तो $\vec{PQ}$ का मान है	(ii) पूर्ण धनात्मक सह सम्बन्ध

(स) $\int_0^1 \log_e x \, dx =$ (iii) $\sqrt{143}$

(द) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (iv) 2

(इ) जब $r = 1$ तब सह–सम्बन्ध होगा– (v) $\sin^{-1}\frac{x}{a}$

Match the column :

I	II
(a) The distance from the YZ – Plane to the point (2, 3, 4) is	(i) –1
(b) If the position Vactors of $\vec{P}$ and $\vec{Q}$ are $3i + 5j - 7k$ and $3i - 4j + k$ then value of vactor $\vec{PQ}$ will be.	(ii) perfect positive correlation
(c) $\int_0^1 \log_e x \, dx =$	(iii) $\sqrt{143}$
(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	(iv) 2
(e) when $r = 1$ then correlation is :	(v) $\sin^{-1}\frac{x}{a}$

4. एक वाक्य में उत्तर दीजिये– 5 अंक

(अ) x अक्ष की दिक् कोज्याएँ लिखिये–

(ब) $\int \sec x \, dx$ का मान लिखिए

(स) $\int_a^b f(x) \, dx$ का मान लिखिए

(द) यदि $\int_a^b f(x) \, dx$ एवं $n = 4$ तब सिम्पसन का नियम लिखिए

(इ) न्यूटन रेप्सन विधि से 10 का घनमूल प्राप्त करने में प्रथम आवृति मूल का मान लिखिए

Answer in one word :

(a) Write the direction cosine of x axis–

(b) Write the value of $\int \sec x \, dx$

(c) Write the value of $\int_a^b f(x) \, dx$

(d) If $\int_a^b f(x) \, dx$ and $n = 4$ then write simpson's rule

(e) To find Cube root of 10 from Newton Raphson's method write first approximation root is :

5. सत्य/असत्य छाँटकर लिखिये– 5 अंक

(अ) अचर पद का समाकलन शून्य होता है

(ब) $\int f_1(x) . f_2(x) \, dx = f_1(x) . \int f_2(x) \, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) . \int f_2(x) \, dx \right] dx$

(स) सिम्पसन नियम का प्रयोग आंकिक विधियों में किया जाता है

(द) यदि $e^0 = 1$, $e^1 = 2.72$, $e^2 = 7.39$, तो समतल चतुर्भज नियम से $\int_0^3 e^x \, dx = 6.915$ होगा

(इ) $\int_2^4 x \, dx = \frac{1}{2}(4^2 - 2^2)$ आंकिक समाकलन कहलाता है

Write TRUE/FALSE in the following :

(a) Integration of constant term is zero

(b) $\int f_1(x) . f_2(x) \, dx = f_1(x) . \int f_2(x) \, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) . \int f_2(x) \, dx \right] dx$

(c) Simpsons rule is used in numerical method

(d) If $e^0 = 1$, $e^1 = 2.72$, $e^2 = 7.39$, then by trapezodial rule $\int_0^3 e^x \, dx = 6.915$

(e) $\int_2^4 x \, dx = \frac{1}{2}(4^2 - 2^2)$ is known as numerical integration

6. यदि *ABCDE* एक समपंचभुज है तो सिद्ध कीजिए $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 0$. 2 अंक

If ABCDE is a regular pentagon then prove that $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 0$.

OR (अथवा)

यदि बिन्दु 0 के सापेक्ष A और B के स्थिति सदिश क्रमशः $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $5\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ हो तो $\overrightarrow{AB}$ तथा $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ज्ञात कीजिए।

If the position vector of A and B with respect to the origin 0 be $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ and $5\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ then find $\overrightarrow{AB}$ and $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

7. सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{b}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ का अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए। 2 अंक

Find the scalar product of vactors $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ and $\vec{b}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$.

OR (अथवा)

λ का मान ज्ञात कीजिए यदि सदिश $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् है।

Find the value of λ if the vactors $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ and $\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k}$ are perpendicular.

8. बिन्दुओं $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ तथा $3\hat{k}-2\hat{j}$ को मिलाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the vactor equation of line joining the point $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ and $3\hat{k}-2\hat{j}$.

2 अंक

OR (अथवा**)**

एक सरल रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ है। इस रेखा की सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

The equation of a line in cartesian form is $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ find its equation in vactor form.

9. $\cos x + 5 \sin x + x^n$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए। 2 अंक

Integrate $\cos x + 5 \sin x + x^n$ with resepect to x

OR (अथवा**)**

$\sqrt[4]{x}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए :

Integrate $\sqrt[4]{x}$ with respect to x

10. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2 अंक

Find the value of $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

OR (अथवा)

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

11. $\frac{x}{(x-2)(x-3)}$ को आंशिक भिन्न में विभक्त कीजिए– 4 अंक

Resolve $\frac{x}{(x-2)(x-3)}$ in to partial fractions

OR (अथवा)

$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ को आंशिक भिन्न से विभक्त कीजिए।

Resolve $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ in to partial fractions

12. यदि $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ तो सिद्ध कीजिए कि $xy + yz + zx = 1.$

4 अंक

If $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$ then prove that $xy + yz + zx = 1.$

OR (अथवा)

सिद्ध कीजिए कि $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{27}{11}.$

Prove that $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{27}{11}.$

13. प्रथम सिद्धांत से $\sin x$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। 4 अंक

Find the differential coefficient of $\sin x$ by first principle :

OR (अथवा)

e^x का अवकल गुणांक प्रथम सिद्धांत से ज्ञात कीजिए।

Find the differential coefficient of e^x by first principle.

14. यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$. 4 अंक

If $y = (\sin^{-1} x)^2$ then prove that $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

OR (अथवा)

$\log_e \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

Find the differential coefficient of $\log_e \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ with respect to x.

15. एक कण एक सरल रेखा में गति कर रहा है समय t पर उसके द्वारा चली दूरी $s = 4t^3 + 2t^2$ से दी जाती है समय $t = 4$ sec. पर कण का वेग व त्वरण ज्ञात कीजिए।

One partical is moving in straight line the distance s travelled by its given relation $s = 4t^3 + 2t^2$. Find the velocity and acceleration of the particle after $t = 4$ sec.

4 अंक

OR (अथवा)

फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ की अन्तराल [1, 3] में रोले प्रमेय की जाँच कीजिए।

Verify the Rolle's theorem for the function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ on [1, 3].

16. निम्न आँकड़ों के लिए x तथा y के बीच कार्ल पियर्सन के सह सम्बन्ध गुणांक को ज्ञात कीजिए।

x	1	2	3	4	5
y	2	5	7	8	10

Find the Karl Pearsons correlation coefficient between variable x and y for following data:

4 अंक

x	1	2	3	4	5
y	2	5	7	8	10

OR (अथवा)

दो चर राशियों x और y का सहसम्बन्ध गुणांक r है तो सिद्ध कीजिए

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

जहाँ σ_x^2, σ_y^2 एवं σ_{x-y}^2 क्रमशः x, y एवं $x - y$ के प्रसरण गुणांक है

If r is coefficient of correlation of two variable x and y then prove that

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

When σ_x^2, σ_y^2 and σ_{x-y}^2 are coefficient of varience of x, y and $x - y$.

17. किसी फर्म के विज्ञापन पर खर्च और बिक्री के आँकड़े निम्न प्रकार प्राप्त हुए, सहसम्बन्ध गुणांक $r = 0.9$ हैं, यदि प्रस्तावित विज्ञापन खर्च 10 करोड़ रुपये हो तो बिक्री बताइए। 4 अंक

	बिक्री रु करोड़	विज्ञापन खर्च रु. करोड़
माध्य	40	06
मानक विचलन	10	1.5

Following data are related to the expenditure on advertizement and sell at farm: 4 अंक

	Sell ₹. (Caror)	Advertizement expenditure ₹. (Caror)
Mean	40	06
Standard deviation	10	1.5

coefficient of correlation $r = 0.9$ if the prapossed advertizement expenditure is ₹ 10 Caror then find out the expected sell.

OR (अथवा)

दो समाश्रयण रेखाओं $x + 3y = 11$ और $2x + y = 7$ के आधार पर x और y के बीच सह सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए $y = 4$ के लिए x के मान की गणना कीजिए।

Find the correlation coefficient between x and y on the basis of two regrassion line $x + 3y = 11$ and $2x + y = 7$ calculate the value of x when $y = 4$.

18. सिद्ध कीजिए कि एक घन के किन्हीं दो विकर्णों के बीच का कोण $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।

5 अंक

Prove that the angle between any two diogonals of a cube is $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

OR (अथवा)

एक समतल निर्देशांक्षों को क्रमशः A, B तथा C पर काटता है। यदि ΔABC का केन्द्रक $(-2, 4, 6)$ है तो समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

A plane intersects the co-ordinate axes at point A, B and C resecpectively. If the centroid of the ΔABC is $(-2, 4, 6)$ then find the equation of the plane.

19. मान ज्ञात कीजिए– 5 अंक

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - x}{3x - \sin x}$$

Find the value of

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - x}{3x - \sin x}$$

OR (अथवा)

यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 4x}{x^2} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$ तो $f(x)$ की $x = 0$ पर सांतत्यता की विवेचना कीजिए।

If $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 4x}{x^2} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$ then discuss the continuity of $f(x)$ at $x = 0$

20. $\int \frac{1}{1-2\sin x}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए– 5 अंक

Find the value of $\int \frac{1}{1-2\sin x}\,dx$

OR (अथवा)

$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx$ मान ज्ञात कीजिए–

Find the value of $\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx$

21. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए– 5 अंक

$(1 + x^2)\, dy = (1 + y^2)\, dx$

Solve the following differential equation

$(1 + x^2)\, dy = (1 + y^2)\, dx$

OR (अथवा)

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए–

$(e^x + e^{-x})\, dy = (e^x - e^{-x})\, dx$

Solve the following differential equation

$(e^x + e^{-x})\, dy = (e^x - e^{-x})\, dx$

22. दो घनाकार पांसे एक साथ फेंके जाते हैं। पहले पांसे पर विषम संख्या अथवा दोनों पांसों के ऊपरी संख्याओं का योग 9 प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

5 अंक

Two cubical disc are thrown simultaneously find the probability of getting an odd number on the first disc or a sum 9 on the two dice.

OR (अथवा)

52 पत्तों की फेंटी हुई ताश की गड्डी में से 2 पत्ते निकाले जाते हैं। दोनों के लाल या इक्के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Two cards are drown from a well shuffled pack of 52 cards find the probability that both cards are Red or Ace.

23. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ के संकेन्द्रीय है तथा जिसकी त्रिज्या इस गोले की त्रिज्या से 3 गुनी है।

6 अंक

Find the equation of sphere which co-centric to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ and having the radius 3 times of it.

OR (अथवा)

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7}$ एवं $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{5}$ परस्पर प्रतिच्छेद करती है, प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

Show the lines $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7}$ and $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{5}$ intersect each other find the point of intersection also.

24. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए– 6 अंक

$\sin (A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$

Prove that by vactor method

$\sin (A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$

OR (अथवा)

रेखाओं $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) + t(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$

$\vec{r}=(2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}) + s(3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k})$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the minimum distance between the lines :

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) + t(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$

$\vec{r}=(2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}) + s(3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k})$

कक्षा – **12** वीं

अंक योजना

Mark Dirsbution 2013-14

`हायर सेकेण्डरी — पूर्णांक – 100

विषय : गणित — समय – 3.00 घण्ट

क्र.	इकाई एवं विषय वस्तु	इकाई पर आ. अंक	वस्तुनिष्ठ 1 अंक	अंकवार प्रश्नो की संख्या				
				2	4	5	6	कुल
				अंक	अंक	अंक	अंक	प्रश्न
1.	आंशिक भिन्न	5	1	–	1	–	–	1
2.	प्रतिलोम फलन	5	1	–	1	–	–	1
3. 4. 5.	त्रिविमीय ज्यामितीय समतल सरल रेखा एवं गोला	15	4	–	–	1	1	2
6. 7. 8.	सदिश सदिशों का गुणनफल सदिशों का त्रिविमीय ज्या. में अनुप्रयोग	15	3	3	–	–	1	4
9.	फनल, सीमा, सांतत्य	5	–	–	–	1	–	1
10. 11.	अवकलन कठिन अवकलन	10	2	–	2	–	–	2
12.	अवकलन का अनुप्रयोग	5	1	–	1	–	–	1
13. 14. 15.	समाकलन कठिन समाकलन निश्चित समाकलन	15	6	2	–	1	–	3
16.	अवकलन समीकरण	05	–	–	–	1	–	1
17.	सहसंबंध	05	1	–	1	–	–	1
18.	समाश्रयण	05	1	–	1	–	–	1
19.	प्रायिकता	05	–	–	–	1	–	1
20	आंकिक विधियाँ	05	5	–	–	–	–	–
	योग	100	25	5	7	5	2	19+ **5** = **24**

निर्देश : प्रश्नपत्र निर्माण हेतु विशेष निर्देश

1. प्रश्न क्र. 1 से 5 तक 5 प्रकार के वस्तुनिष्ठ प्रश्न होगें। जिसके अंतर्गत एक शब्द में उत्तर मेंचिग, सही विकल्प तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति के प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न के लिए 1 अंक निर्धारित है। (1 × 5 × 5 = 25) यह प्रश्न प्रत्येक छात्र को हल करना अनिवार्य है।
2. प्रश्न क्र. 6 से 24 प्रत्येक प्रकार के प्रश्नों की उत्तर सीमा नि. होगी

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न	02 अंक	लगभग 30 शब्द
लघुउत्तररीय प्रश्न	04 अंक	लगभग 75 शब्द
दीर्घउत्तरीय प्रश्न	05 अंक	लगभग 120 शब्द
दीर्घउत्तरीय प्रश्न	06 अंक	लगभग 150 शब्द
निबंधात्मक प्रश्न	07 अंक	लगभग 250 से 150 शब्द

3. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर शेष सभी प्रश्नों में विकल्प योजना रहेगी।
4. विकल्प के प्रश्न उसी इकाई से, समान कठिनाई स्तर वाले तथा पाठ्यक्रम अनुसार होना चाहिए।
5. कठिनाई स्तर– 40% सरल प्रश्न, 45% सामान्य प्रश्न, 15% कठिन।

हायर सैकेण्डरी परीक्षा

Higher Secondary Examination

Model Answer

Time : 3 Hours Maximum Marks : 100

1. विकल्पों के सही उत्तर : प्रत्येक सही उत्तर पर 1 अंक, 5 अंक

(अ) (i) $\frac{1}{2(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$ (ब) (ii) $\frac{\pi}{2}$

(स) (ii) $\frac{\pi}{2}$ (द) (iv) $\frac{\pi}{2}$ (इ) (iii) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति : प्रत्येक सही उत्तर पर 1 अंक, 5 अंक

(अ) a, b, c (ब) $\bar{a} \times \bar{b} = 0$

(स) $\cos x$ (द) $3 - 3t^2$ (इ) $\log x + c$

3. सही जोड़ी : प्रत्येक सही उत्तर पर 1 अंक, 5 अंक

(अ) (*iv*) 2 (ब) (*iii*) $\sqrt{143}$

(स) (*i*) –1 (द) (*vi*) $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

(इ) (*ii*) पूर्ण धनात्मक सह संबंध

4. एक वाक्य में उत्तर : प्रत्येक सही उत्तर पर 1 अंक, 5 अंक

(i) (1, 0, 0) (ii) $\log (\sec x + \tan x) + c$

(iii) $F(b) - F(a)$ (iv) $\frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2 y_2 + y_4]$

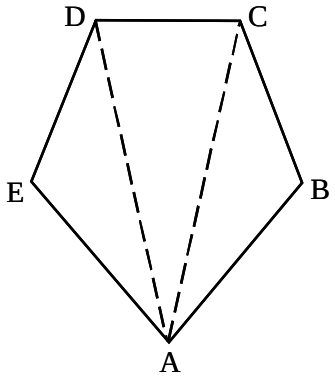
(v) 2

5. सत्य/असत्य कथन : प्रत्येक सही उत्तर पर 1 अंक, 5 अंक

(अ) असत्य (ब) सत्य

(स) सत्य (द) सत्य (इ) असत्य

6. सम पंचभुज *ABCDE* में



1 अंक

$L.H.S. = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$

$= \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA}$ (ΔABC में त्रिभुज के योगफल नियम से)

$= (\overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EA})$ (इसी प्रकार ΔACD में, ΔADE में Δ नियम से)

$= (\overline{AE} + \overline{EA})$ $= \overline{AA}$

$= 0 = RHS$ 1 अंक

OR (अथवा**)**

हलः $\overline{AB}$ = B का स्थित सदिश $-A$ का स्थित सदिश

$= (5\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

$= (5–2)\,\hat{i} + (3+1)\,\hat{j} + (1–1)\,\hat{k}$

$= 3\,\hat{i} + 4\,\hat{j} + 0\,\hat{k}$ 1 अंक

$= 3\,\hat{i} + 4\,\hat{j}$

Ans.

अब $|\overrightarrow{AB}| = |3\,\hat{i} + 4\,\hat{j}|$

$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$

$|\overrightarrow{AB}|$ = 5 इकाई 1 अंक

प्र.7

हलः अदिश गुणन $= \bar{a} \cdot \bar{b}$

$= (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ 1 अंक

$= 6 + 4 - 4$

$= \quad 6$ *Ans.* 1 अंक

OR (अथवा**)**

माना कि $\bar{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\bar{b} = \hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$

यदि $\bar{a}$ और $\bar{b}$ लंबवत् है तो

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$$ 1 अंक

या $(2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} - 4\hat{j} + \lambda\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow \quad 2 - 4 + \lambda = 0$

$\Rightarrow \quad -2 + \lambda = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 2$ *Ans.* 1 अंक

प्र.8

हल: दिये गये बिन्दुओं के स्थित सदिश हैं :–

$\bar{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\bar{b} = -2\hat{j} + 3\hat{k}$

रेखा का सदिश समीकरण होता है–

$$\bar{r} = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a})$$ 1 अंक

$$= (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) - t\{(-2\hat{j} + 3\hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})\}$$

$$= (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) - t\{-2\hat{j} + 3\hat{k} - \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\}$$

$$\bar{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) - t(-\hat{i} + 2\hat{k})$$ *Ans.* 1 अंक

OR (अथवा**)**

हल: माना $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2} = t$

$\Rightarrow \quad x = 3t + 5,\ y = 7t - 4,\ z = 2t + 6$ 1 अंक

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$= (3t + 5)\hat{i} + (7t - 4)\hat{j} + (2t + 6)\hat{k}$$

$$\bar{r} = (5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) + t(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$$ *Ans.* 1 अंक

प्र.9

हल: $\int \{\cos x + 5 \sin x + x^n\}\, dx$

$= \int \cos\ x\ dx + 5\ \int \sin\ x\ dx + \int x^n\ dx$ 1 अंक

$= \sin\ x - 5\ \cos\ x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ *Ans.* 1 अंक

OR (अथवा**)**

हल: $\int \sqrt[4]{x}\ dx = x^{¼}\ dx$ 1 अंक

$= \frac{x^{(¼+1)}}{(¼+1)}$

$= \frac{x^{5/4}}{5/4}$

$\int \sqrt[4]{x}\ dx = \frac{4}{5}\ x^{5/4} + c$ 1 अंक

प्र.10

हल: $\int_1^3 \frac{1}{x}\ dx = [\log x]_1^3$ 1 अंक

$= [\log\ 3 - \log\ 1]$

$= \log\ 3$ *Ans.*

1 अंक

OR (अथवा)

हल: $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\ dx = [\tan^{-1} x]_0^{\sqrt{3}}$ 1 अंक

$= \tan^{-1}\sqrt{3}\ - \tan^{-1}\ 0$

$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) - 0$

$= \frac{\pi}{3}$ *Ans.*

1 अंक

प्र.11

हल: माना $\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$ ...(1)

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)\ \ (x-3)}$$ 1 अंक

$$x = A\ (x-3) + B\ (x-2) \quad ....(2)$$

समी. (2) में $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ रखने पर

$$3 = 0 + B\ (3-2)$$

$$\boxed{B=3}$$ 1 अंक

समी. (2) में $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ रखने पर

$$2 = A\ (2-3) + 0$$

$$2 = -A$$

$$\boxed{A=-2}$$ 1 अंक

A और B के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = -\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}\ \ Ans.$$ 1 अंक

OR (अथवा)

हल: माना– $$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+c}{(x^2+1)} \quad ...(1)$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+c)(x-1)}{(x-1)\,(x^2+1)}$$

$$2x + 1 = A\ (x^2 + 1) + (Bx + c)\ (x-1) \quad ....(2)$$

समी. (2) में $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ रखने पर 1 अंक

$$2(1) + 1 = A\ (1^2 + 1) + (0)$$

$$2A = 3$$

$$\boxed{A=3/2}$$ 1 अंक

समी. (2) में $x = 0$ रखने पर 1 अंक

$$2(0) + 1 = A\ (0 + 1) + \{B(0) + c\}\ (0 - 1)$$

$$1 = A - C$$

$$C = A - 1$$

$$C = \frac{3}{2} - 1$$

$$\boxed{C=1/2}$$

समी. (2) से दोनों पक्षों से x^2 के गुणांकों की तुलना करने पर

$A + B = 0$

$B = -A$

$$\boxed{B = -\frac{3}{2}}$$ 1 अंक

A, B, C के मान समी. (1) में रखने पर

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}{(x^2+1)}$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{3}{2(x-1)} + \frac{-3x+1}{2(x^2+1)}$$ *Ans.* 1 अंक

प्र.12

हलः दिया गया है :

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}x + \tan^{-}\left(\frac{y+z}{1-yz}\right) = \frac{\pi}{2}$$ 1 अंक

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{x+\left(\frac{y+z}{1-yz}\right)}{1-x\left(\frac{y+z}{1-yz}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{x-xyz+y+z}{1-xy-zy-zx} = \frac{\pi}{2}$$ 1 अंक

$$\Rightarrow \quad \frac{x-xyz+y+z}{1-xy-zy-zx} = \tan\frac{\pi}{2}$$ 1 अंक

$$\Rightarrow \quad \frac{x-xyz+y+z}{1-xy-zy-zx} = \frac{1}{0}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - xy - yz - zx = 0$$

$$\Rightarrow \quad xy + yz + zx = 1$$ 1 अंक

OR (अथवा)

हल: $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{27}{11}$

माना $\sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta$

$\sin\theta = \frac{3}{5}$

तो $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ 1 अंक

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3/5}{4/5}$

$\tan\theta = \frac{3}{4}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

$\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$....(1) 1 अंक

L.H.S. $= \sin^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{3}{5}$ (समी. (1) से)

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{27}{20}}{\frac{11}{20}}\right)$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{27}{11} =$ R.H.S. 2 अंक

प्र.13

हल: माना $f(x) = \sin x$

$x = x + h$ रखने पर

$f(x + h) = \sin (x + h)$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ 1 अंक

$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{(x+h)+x}{2}.\sin\frac{(x+h)-x}{2}}{h}$

$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\sin\frac{h}{2}}{h}$ 1 अंक

$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

$\Rightarrow \quad \cos x \ . \ 1$

$\frac{d}{dx} \sin x \quad \Rightarrow \cos x \quad$ *Ans.* 2 अंक

OR (अथवा)

हल: माना $f(x) = e^x$

$x = x + h$ रखने पर

$f(x + h) = e^{x+h}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$ 1 अंक

$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x.e^h-e^x}{h}$

$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h}$ 1 अंक

$\Rightarrow \quad e^x \times 1 \qquad \left[\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1\right]$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad Ans.$$ 2 अंक

प्र.14

हलः ज्ञात है : $y = (\sin^{-1}x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^2$$

$$= 2\ \sin^{-1}x.\ \frac{d}{dx}\ (\sin^{-1}x)$$

$$= 2\ \sin^{-1}x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$ 1 अंक

या $$\sqrt{1-x^2}\ .\frac{dy}{dx} = 2\ \sin^{-1}x$$

पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\ \left[\sqrt{1-x^2}\times\frac{dy}{dx}\right] = 2.\frac{d}{dx}\ \sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{1-x^2}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{dy}{dx}.\frac{d}{dx}\ \sqrt{1-x^2}\ =\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$ 1 अंक

$$\Rightarrow\ \sqrt{1-x^2}\ \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\times\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\times\frac{d}{dx}(1-x^2) =\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{1-x^2}\ \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\times\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) =\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{1-x^2}\ \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \frac{dy}{dx}=\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\ \frac{d^2y}{dx^2}-\ x.\frac{dy}{dx}=\ 2$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\ \frac{d^2y}{dx^2}-\ x.\frac{dy}{dx}-\ 2\ =\ 0 \qquad \text{इति सिद्धम्}$$ 2 अंक

OR (अथवा)

हलः दिया है : $y = \log_e \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

$$= \log_e \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \log_e \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}} = \log_e \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \log_e \frac{1+\sin x}{\cos x}$$ 1 अंक

$$y = \log \left[\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$y = \log [\sec x + \tan x]$ 1 अंक

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \log (\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \times \frac{d}{dx} (\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \times (\sec x \tan x + \sec^2 x)$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \times \sec x (\tan x + \sec x)$$

$\frac{dy}{dx} = \sec x$ *Ans.* 2 अंक

प्र.15

हलः ज्ञात है : $s = 4t^3 + 2t^2$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} (4t^3 + 2t^2)$$

या $\frac{ds}{dt} = v = 12t^2 + 4t....(1)$ 1 अंक

प्रश्नानुसार $t = 4$ सै. पर कण का वेग होगाः

$v = 12(4)^2 + 4(4)$

$v = 12 \times 16 + 16$

$v = 192 + 16$

$v = 208$ मीटर/सैकेण्ड *Ans.* 1 अंक

पुनः समी. (1) को t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 'f\,' = \frac{d}{dt}(12t^2 + 4t)$$

$f = 24t + 4$ .....(2)

तो $t = 4$ पर कण का त्वरण

$f = 24\ (4) + 4$

$= 96 + 4$

f = 100 मीटर/सैकण्ड^2 *Ans.* 2 अंक

OR (अथवा)

हलः $f\ (x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

दिया गया फलन बहुपदीय फलन है अतः यह अन्तराल [1, 3] में संतत् होगा।

$$\frac{d}{dx} f\ (x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

या $f^{\,1}\ x = 3x^2 - 12x + 11$ ....(1) 1 अंक

अतः दिया गया फलन अन्तराल [1, 3] में अवकलनीय है।

$f\ (1) = (1)^3 - 6\ (1)^2 + 11\ (1) - 6$

$f\ (1) = 0$

$f\ (3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 11 \times (3) - 6$

$f\ (3) = 27 - 54 + 33 - 6$

$f\ (3) = 0$

अतः $f\ (1) = f\ (3)$ 1 अंक

मानाकि अन्तराल [1, 3] में c इस प्रकार है कि

$f^{\,1}\ (c) = 0$

या $3c^2 - 12\ c + 11 = 0$

$$c = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times (3)\ (11)}}{2 \times 3}$$

$= \frac{12 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{2(6 \pm \sqrt{3})}{6}$

$c = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$

$c = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

स्पष्ट है कि c के दोनों मान अन्तराल [1, 3] में है।

अतः $c = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in [1, 3]$ इस प्रकार है

$f'(c) = 0$

अतः रोले प्रमेय सत्यापित है। 2 अंक

प्र.16

हल:

x	y	dx = x–3	dy = y–z	dx × dy	dx^2	dy^2
1	2	–2	–5	10	4	25
2	5	–1	–2	2	1	4
3	7	0	0	0	0	0
4	8	1	1	1	1	1
5	10	2	3	6	4	9
		$\Sigma dx = 0$	$\Sigma dy = -3$	$\Sigma dxdy = 19$	$\Sigma dx^2 = 10$	$\Sigma dy^2 = 39$

1 अंक

हम जानते हैं कि: $r = \frac{n\Sigma dx\, dy - \Sigma dx\, \Sigma dy}{\sqrt{n\Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2}\sqrt{n\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}}$ म

$= \frac{5 \times 19 - 0 \times (-3)}{\sqrt{5 \times 10 - (0)^2}\sqrt{5 \times 39 - (-3)^2}}$

$= \frac{95}{\sqrt{50} \times \sqrt{195 - 9}} = \frac{95}{7.07 \times 13.638}$

$= \frac{95}{96.42}$

$r = 0.98$ *Ans.*

OR (अथवा)

हल: हम जानते हैं कि

$$\sigma_{x-y}^2 = \frac{1}{n}[(x - y) - (\bar{x} - \bar{y})]^2$$

$$= \frac{1}{n}[(x - \bar{x}) - (y - \bar{y})]^2$$

1 अंक

$$= \frac{1}{n}\Sigma\,[(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 - 2(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma\,[(x - \bar{x})^2 + \frac{1}{n}\Sigma\,(y - \bar{y})^2 - 2\frac{1}{n}\Sigma\,(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})$$ 1 अंक

$\sigma_{x-y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r\,\sigma_x\,\sigma_y$ जहाँ $r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}$

या $2r\,\sigma_x\,\sigma_y = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2$

$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}}{2\sigma_x\sigma_y}$ सिद्ध हुआ 2 अंक

प्र.17

हल: x की y पर समाश्रयण रेखा है

$$x - \bar{x} = r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}) \ldots.(1)$$

ज्ञात है: $\bar{x} = 40,\ \bar{y} = 6,\ \sigma_x = 10,\ \sigma_y = 1.5,\ r = 0.9$

तो $x - 40 = 0.9 \times \frac{10}{1.5}(y - 6)$ 1 अंक

$$x = \frac{90}{15}(y - 6) + 40$$

$x = 6\,(y - 6) + 40$ ....(2) 1 अंक

जब y = 10 हो तो, समी. (2) में y का मान रखने पर

$x = 6 \times (10 - 6) + 40$

$x = 24 + 40$

$x = 64$

अतः प्रस्तावित बिक्री = 64 करोड़ रुपये *Ans.* 2 अंक

OR (अथवा)

हल: दो समाश्रयण रेखाओं के समीकरण हैं :

$x + 3y = 11$ .....(1)

$2x + y = 7$ .....(2)

y की x पर समाश्रयण रेखा है –

$x + 3y = 11$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$\therefore \quad b_{yx} = -\frac{1}{3}$$ 1 अंक

x की y पर समाश्रयण रेखा है–

$2x + y = 7$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y + \frac{7}{2} .....(3)$$

$$\therefore \quad b_{xy} = -\frac{1}{2}$$ 1 अंक

हम जानते हैं कि, $r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)}$$

$$r = \sqrt{\frac{+1}{6}}$$

$$\boxed{r = -\frac{1}{6}}$$ क्योंकि दोनों समाश्रयण गुणांक $-ve$ है 1 अंक

अब समी. (3) में $y = 4$ रखने पर

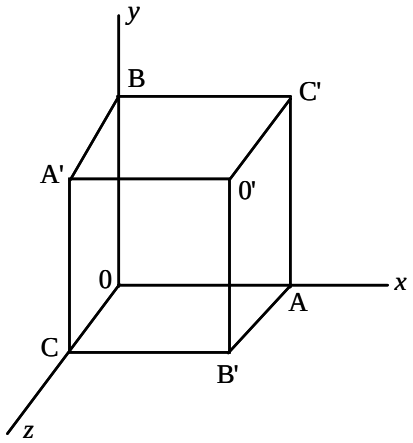
$$x = -\frac{1}{2}(4) + \frac{7}{2} = \frac{-4+7}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{1}{6} \text{ and } x = \frac{3}{2}$$ *Ans.* 1 अंक

प्र.18

हल: माना घन के प्रत्येक कोर की लम्बाई a है। माना घन का शीर्ष 0 मूल बिन्दु पर है। माना 0 से गुजरने वाली कोरें OA, OB, OC निर्देशाक्ष हैं। तब –



O (0, 0, 0), A (a, 0, 0), B (0, a, 0), C (0, 0, a)

O' (a, a, a), A' (0, a, a), B' (a, 0, a) तथा C' (a, a, 0) 1 अंक

घन के विकर्ण AA', BB', CC' तथा OO' हैं।

OO' के दिक् अनुपात $a - 0$, $a - 0$, $a - 0$ अर्थात् (a, a, a) हैं

तो OO' की दिक्–कोज्याएँ हैं, $\frac{a}{a\sqrt{3}}, \frac{a}{a\sqrt{3}}, \frac{a}{a\sqrt{3}}$ अर्थात् $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

इसी प्रकार BB' की दिक् कोज्याएँ हैं $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 2 अंक

माना विकर्ण OO' तथा BB' के मध्य कोण θ है,

तब $\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$

या $\cos\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

या $\cos\theta = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$

$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$ सिद्ध हुआ 2 अंक

OR (अथवा)

हल: माना समतल का समीकरण है–

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ .....(1)

तो निर्देशांक्षों पर काटे गए बिन्दुओं A, B तथा C के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0, 0), (0, b, 0)$ तथा $(0, 0, c)$ होंगे 1 अंक

ΔABC के केन्द्रक के निर्देशांक :

$$\Rightarrow\left(\frac{a+0+0}{3},\frac{0+b+0}{3},\frac{0+0+c}{3}\right)$$

अतः $\Rightarrow \left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)$ 2 अंक

लेकिन प्रश्नानुसार केन्द्रक के निर्देशांक $(-2, 4, 6)$ है

अर्थात् $\frac{a}{3}=-2$ या $a = -6$

$\frac{b}{3}=4$ या $b = 12$

$\frac{c}{3}=6$ या $c = 18$

a, b तथा c के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{x}{-6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1$$

$-6x + 3y + 2z = 1$ *Ans.* 2 अंक

प्र.19

हल: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x-x}{3x-\sin x}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x\times\frac{\tan 2x}{2x}-x}{3x-x\times\frac{\sin x}{x}}$$ 1 अंक

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x\left[2x\frac{\tan 2x}{2x}-1\right]}{x\left[3-\frac{\sin x}{x}\right]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lim_{x\to 0}\left[2\frac{\tan 2x}{2x}-1\right]}{\lim_{x\to 0}\left[3-\frac{\sin x}{x}\right]}$$ 2 अंक

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2-1}{3-1}\right)$$

$$\left|\begin{array}{ll}\lim_{\theta\to 0} & \frac{\tan\theta}{\theta}=1\\ \lim_{\theta\to 0} & \frac{\sin\theta}{\theta}=1\end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{2} \qquad \textit{Ans.}$$ 2 अंक

OR (अथवा)

हल: ज्ञात है: $f(x) = \frac{1-\cos 4x}{x^2}$

$x = 0 + h$ रखने पर

यदि $x \to 0$ तो $h \to 0$ होगा

$$Rf(0+h) = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 4(0+h)}{(0+h)^2}$$

$$Rf(0+h) = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 4h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{4h}{2}\right)}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2 2h}{h^2}\times\frac{4}{4}$$

$$= \lim_{h\to 0} 8 \times \frac{\sin^2 2h}{(2h)^2}$$

$$= 8\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2$$

$Rf(0+h) \Rightarrow \quad 8 \times 1 = 8$ 2 अंक

अब $x = 0 - h$ रखने पर,

यदि $x \to 0$ तो $h \to 0$ होगा

$$Lf\ (0 - h) = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos 4(0+h)}{(0+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(-4h)}{(-h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos 4h}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 2h}{h^2} \times \frac{4}{4}$$

$$= 8 \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 2h}{(2h)^2}$$

$$= 8 \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin 2h}{2h}\right)^2$$

$Lf\ (0 - h) \Rightarrow \quad 8 \times 1 = 8$ 2 अंक

दिया गया है, $f\ (0) = 4$

स्पष्ट है, $Rf\ (0 + h) = Lf\ (0 - h) \neq f\ (0)$

अतः दिया गया फलन $x = 0$ पर संतत नहीं है। 1 अंक

प्र.20

हल: $I = \int \frac{dx}{1-2\sin x}$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right) - 2\times 2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}\left\{\tan^2 \frac{x}{2} + 1 - 4\tan \frac{x}{2}\right\}}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{\left(1+\tan^2 \frac{x}{2} - 4\tan \frac{x}{2}\right)}$$ 1 अंक

$\tan \frac{x}{2} = t$ रखने पर,

तो $\frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2} dx = dt$ या $\sec^2 \frac{x}{2} dx = 2dt$

$$I = \int \frac{2dt}{(1+t^2-4t)} = \int \frac{2dt}{t^2-4t+1} = \int \frac{2dt}{t^2-2(t)(2)+4-4+1}$$

$$= \int \frac{2dt}{(t-2)^2-3}$$

$$= \int \frac{2dt}{(t-2)^2-(\sqrt{3})^2} \quad \text{माना} \quad t-2 = \mu \qquad 2 \text{ अंक}$$

$$\text{तो} \quad dt = d\mu$$

$$= \int \frac{2d\mu}{\mu^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2}{2\times\sqrt{3}} \log \frac{\mu-\sqrt{3}}{\mu+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{(t-2)-\sqrt{3}}{(t-2)+\sqrt{3}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{\tan\frac{x}{2}-2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}} + C \qquad Ans. \qquad 2 \text{ अंक}$$

OR (अथवा)

हल: माना कि $I = \int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

$$I = \int \frac{dx}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{4}+\cos x.\sin\frac{\pi}{4}\right)} \qquad 2 \text{ अंक}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \text{cosec}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \log \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + c \qquad \textit{Ans.}$$ 3 अंक

प्र.21

हल: दिया गया अवकल समीकरण है:

$$(1 + x^2)\, dy = (1 + y^2)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$$ 1 अंक

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}x = \tan^{-1}y + \tan^{-1}c$$ 2 अंक

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}c$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy} = \tan^{-1}c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-y}{1+xy} = c \qquad \textit{Ans.}$$ 2 अंक

OR (अथवा)

हल: ज्ञात है: $(e^x + e^{-x}) \frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ 1 अंक

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\Rightarrow \quad \int dy = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \ldots\ldots(1)$$

$$e^x + e^{-x} = t$$

$$\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) = \frac{dt}{dx}$$

$$(e^x - e^{-x})\, dx = dt$$ 2 अंक

समीकरण (1) से $\frac{1}{y} = \int \frac{dt}{t}$

$$\frac{1}{y} = \log\ t + c$$

$$\frac{1}{y} = \log\ (e^x + e^{-x}) + c \qquad \textit{Ans.} \qquad 2 \text{ अंक}$$

प्र.22

हल: माना प्रतिदर्श समिष्ट S है–

तब $n(s) = 36$

पहले पाँसे पर विषम संख्या आने की घटना

$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$
$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$
$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$ 1 अंक

$n\ (A) = 18$

विषम संख्या आने की प्रायकिता

$$P\ (A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P\ (A) = \frac{18}{36}$$

पाँसों पर संख्याओं का योग 9 आने की घटना

$B = \{(3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)\}$

$n\ (B) = 4$

तो संख्याओं का योग 9 प्राप्त करने की प्रायकिता

$$P\ (B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P\ (B) = \frac{4}{36} \qquad 2 \text{ अंक}$$

$A \cap B = \{(3, 6), (5, 4)\}$

$n\ (A \cap B) = 2$

$$P\ (A \cap B) = \frac{2}{36}$$

अभीष्ट प्रायकिता $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{18}{36} + \frac{4}{36} - \frac{2}{36}$

$= \frac{18+4-2}{36}$

$= \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$ *Ans.* 2 अंक

OR (अथवा)

हल: दो पत्तों के लाल होने की प्रायकिता

$$P(A) = \frac{^{26}C_2}{^{52}C_2} = \frac{26\times25}{52\times51}$$

$$P(A) = \frac{325}{1326}$$ 1 अंक

दोनों पत्तों के इक्का होने की प्रायकिता

$$P(B) = \frac{^{4}C_2}{^{52}C_2} = \frac{4\times3}{52\times51}$$

$$P(B) = \frac{6}{1326}$$ 1 अंक

दो लाल इक्के होने की प्रायकिता

$$P(A \cap B) = \frac{^{2}C_2}{^{52}C_2} = \frac{2\times1}{52\times51}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{1326}$$ 1 अंक

अभीष्ट प्रायकिता –

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{325}{1326} + \frac{6}{1326} - \frac{1}{1326}$

$= \frac{330}{1326}$

$P(A \cup B) = \frac{55}{221}$ *Ans.* 2 अंक

प्र.23

हल: दिये गये गोले का समीकरण

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0 \ldots..(1)$$

गोले के सामान्य समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2\mu x + 2\upsilon y + 2\omega z + d = 0$ से तुलना करने पर

$2\mu = -2 \quad \Rightarrow \quad \mu = -1$

$2\upsilon = -4 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = -2$

$2\omega = -6 \quad \Rightarrow \quad \omega = -3$

$d = -11$

गोले के केन्द्र के निर्देशांक $= (-\mu, -\upsilon, -\omega) = (+1, 2, 3)$

गोले की त्रिज्या $= \sqrt{\mu^2 + \upsilon^2 + \omega^2 - d}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 - (-11)}$

$= \sqrt{1+4+9+11}$

$= \sqrt{25} = 5$ 2 अंक

इस गोले के संकेन्द्रीय गोले के केन्द्र के निर्देशांक $= (1, 2, 3)$

संकेन्द्रीय गोले की त्रिज्या $= 3 \times$ गोला (1) की त्रिज्या

$= 3 \times 5$

$= 15$ 2 अंक

अतः संकेन्द्रीय गोले का समीकरण जिसका केन्द्र $(1, 2, 3)$ तथा त्रिज्या 15 है, होगा–

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 15^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14 = 225$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 211 \qquad \textit{Ans.}$$

OR (अथवा)

हल: दी गयी समीकरण है

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7} \quad \ldots.(1)$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-6}{5} \quad \ldots.(2)$$

यहाँ पर $x_1 = -1, \; y_1 = -3, \; z_1 = -5$

$l_1 = 3, \; m_1 = 5, \; n_1 = 7$

तथा $x_2 = 2,\ y_2 = 4,\ z_2 = 6$

$l_2 = 1,\ m_2 = 3,\ n_2 = 5$

यदि रेखाएँ (1) व (2) परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तो वे समतलीय होंगी

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$ 1 अंक

$$= \begin{vmatrix} 2+1 & 4+3 & 6+5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 3\ [25 - 21] - 7\ [15 - 7] + 11\ [9 - 5]$

$= 12 - 56 + 44$

$= 56 - 56 = 0$ 2 अंक

अतः दी गई रेखाएँ परस्पर लंबवत हैं। इति सिद्धम्

प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांकों के लिए

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+5}{7} = \text{(माना)}$$

बिन्दु $(3r - 1, 5r - 3, 7r - 5)$ रेखा (1) पर हैं

यदि रेखा (1) व (2) परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तो

रेखा (1) के बिन्दु, रेखा (2) को भी संतुष्ट करेंगे

अर्थात्

$$\frac{3r-1-2}{1} = \frac{5r-3-4}{3} = \frac{7r-5-6}{5}$$

or $$\frac{3r-3}{1} = \frac{5r-7}{3} = \frac{7r-11}{5}$$

प्रथम दो अनुपात से $\frac{3r-3}{1} = \frac{5r-7}{3}$

$9r - 9 = 5r - 7$

$4r = 2$

$r = \frac{1}{2}$

अतः $3r - 1 = 3 \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$5r - 3 = 5 \times \frac{1}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$

$7r - 5 = 7 \times \frac{1}{2} - 5 = -\frac{3}{2}$ 3 अंक

अतः प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ है।

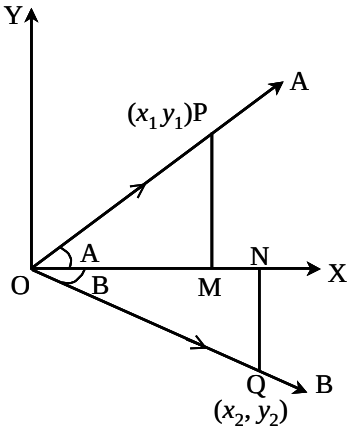
प्र.24

हल: माना ox के अनुदिश मात्रक सदिश $\bar{i}$ तथा oy के अनुदिश $\bar{j}$ मात्रक सदिश।

माना $\angle AOX = \angle A$

$\angle BOX = \angle B$

$\angle AOB = \angle A + \angle B$



OA पर कोई बिन्दु $P(x_1, y_1)$ इस प्रकार है

$|\overline{OP}| = 1$

ΔOPM में $\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP}$

$\overline{OP} = \bar{i}\, x_1 + \bar{j}\, y_1$

$\cos A = \frac{OM}{OP} = \frac{x_1}{1} \Rightarrow x_1 = \cos A$

$\sin A = \frac{PM}{OP} = \frac{y_1}{1} \Rightarrow y_1 = \sin A$

$\overline{OP} = \hat{i} \cos A + \hat{j} \sin A$ ....(1)

इसी प्रकार ΔONB से

$\overline{OQ} = \hat{i} \cos B - \hat{j} \sin B$ ....(2) 3 अंक

$\overline{OQ} \times \overline{OP} = (i \cos B - j \sin B) \times (i \cos A + j \sin A)$

$|OQ|\ |OP| \sin (A + B)\ \hat{k} = \sin A \cos B\ (i \times j) - \cos A \sin B\ \bar{i} \times \bar{j}$

$1\ 1 \sin (A + B)\ \hat{k} = \sin A \cos B\ \hat{k} + \cos A \sin B\ \hat{k}$

$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ Hence Prove 3अंक

OR (अथवा)

हल: दी गयी रेखाओं के समीकरण है

$\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + t\ (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$ ....(1)

तथा $\bar{r} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}) + s\ (3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$ ....(2)

यहाँ $\overline{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\overline{b_1} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

$\overline{a_2} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$ $\overline{b_2} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$

$\overline{a_2} - \overline{a_1} = (2 - 1)\hat{i} + (4 - 2)\hat{j} + (5 - 3)\hat{k}$

$= \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ 1 अंक

$$\overline{b_1} \times \overline{b_2} = \begin{vmatrix} i & j & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}\ (15 - 16) - \hat{j}\ (10 - 12) + \hat{k}\ (8 - 9)$ 2 अंक

$\overline{b_1} \times \overline{b_2} = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$|\overline{b_1} \times \overline{b_2}| = \sqrt{1+4+1}$

$|\overline{b_1} \times \overline{b_2}| = \sqrt{6}$

न्यूनतम दूरी $= \dfrac{(\overline{a_2} - \overline{a_1}).(\overline{b_1} \times \overline{b_2})}{|\overline{b_1} + \overline{b_2}|}$ 2 अंक

$= \dfrac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}).(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{-1 + 4 - 2}{\sqrt{6}}$

न्यूनतम दूरी $= \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ *Ans.* 1 अंक