SET–A

उच्च गणित

(Higher Mathematics)

(Hindi & English Version)

समय : **3** घण्टे | अधिकतम अंक : **100**

Time : 3 Hours | **Maximum Marks: 100**

निर्देश–

1. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
2. प्रश्नो में दिये गये निर्देशों सावधानीपूर्वक पढ़कर सही उत्तर लिखिए।
3. प्रत्येक प्रश्न के निर्धारित अंक प्रश्न के सम्मुख दिये गये है।
4. प्रश्न क्र. 01 से 05 तक वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्न दिये गये है।
5. प्रश्न क्र. 6 से 24 में आन्तरिक विकल्प दिये गये है।
6. जहाँ आवश्यक हो, स्वच्छ नामांकित रेखाचित्र बनाइये।

Note:

1. All question are compulaory.
2. Read the given instruction of Question paper carefully and write Correct answer of them.
3. Alloted marks are Indicated infront of each question.
4. Question No. 01 to 05 are objective type questions.
5. Internal options are given in question. No. 06 to 24
6. Draw the neat and clean latelled diagram if necessary.

1. सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर–पुस्तिका में लिखिए– **1 × 5 = 5** अंक

(a) भिन्न $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ का आंशिक भिन्न हैं :

(i) $\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)}$ (ii) $\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-1)}$

(iii) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ (iv) $\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

(b) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} - 3\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ का मान होगा :

(i) $-\frac{3\pi}{4}$ (ii) $\frac{3\pi}{4}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{2}$

(c) बिन्दु (4, 3, 5) की xz समतल से लम्बवत् दूरी है :

(i) 4 (ii) 3

(iii) 5 (iv) $5\sqrt{2}$

(d) समतल $x + y + z + 3 = 0$ के अभिलंब की दिक्कोज्याएँ है :

(i) 1, 1, 1 (ii) ±1, ±1, ±1

(iii) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iv) $1, 1, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(e) गोले $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 16x + 9z - 6 = 0$ के केन्द्र के निर्देशांक है :

(i) $\left(\frac{3}{4}, 0, \frac{4}{3}\right)$ (ii) (–16, 0, 9)

(iii) $\left(-8, 0, \frac{9}{2}\right)$ (iv) $\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{-3}{4}\right)$

choose the correct answer and write in note book-

(a) Partial fractions of $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ are

(i) $\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)}$ (ii) $\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-1)}$

(iii) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ (iv) $\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

(b) Value of $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} - 3\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ is

(i) $-\frac{3\pi}{4}$ (ii) $\frac{3\pi}{4}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{2}$

(c) Perpendicular distance of point (4, 3, 5) from *xz - plane* is

(i) 4 (ii) 3

(iii) 5 (iv) $5\sqrt{2}$

(d) Direction cosine of normal to the plane are :

(i) 1, 1, 1 (ii) ±1, ±1, ±1

(iii) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iv) $1, 1, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

(e) Coordinates of centre of sphere $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 16x + 9z - 6 = 0$ are

(i) $\left(\frac{3}{4}, 0, \frac{4}{3}\right)$ (ii) (–16, 0, 9)

(iii) $\left(-8, 0, \frac{9}{2}\right)$ (iv) $\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{-3}{4}\right)$

2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य लिखिए– **1 × 5 = 5** अंक

(a) शीर्ष (1, 2, 3), (1, 0, 3), (0, 2, 0) वाले त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक (1, 4/3, 2) हैं।

(b) यदि बिन्दुओं P और Q के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ और $5\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ हो तो $|\overline{PQ}|$ का मान $9\sqrt{2}$ होगा ।

(c) $\sin x + \cos x$ का महत्तम मान 2 होगा ।

(d) यदि $\sum x = 15, \sum y = 40, \sum xy = 110$ तथा $n = 5$ तब x और y के बीच सह–प्रसरण –2 होगा

(e) समाश्रयण गुणांकों का समान्तर माध्य सह गुणांक से बड़ा होता है।

Write true/ false in the following statements.

(a) (1, 4/3, 2) is the coordinate of centroid of triangle whose vertices are (1, 2, 3) (1, 0, 3) (0, 2, 0).

(b) Position vectors of point p & Q are $\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ and $5\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ respectivly then value of $|PQ|$ is $9\sqrt{2}$

(c) Maximum value of $\sin x + \cos x$ is 2

(d) If $\sum x = 15$, $\sum y = 40$, $\sum xy = 110$ and $n = 5$ then covariance between x and y is -2

(e) The arithmetic mean of the regression coefficients is greater than the coefficient of co-relation.

3. प्रत्येक का एक वाक्य में उत्तर दीजिए : **1 × 5 = 5** अंक

(a) यदि $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 5$ और $\theta = 60^o$ हो, तो $|\vec{a}\times\vec{b}|$ का मान क्या होगा ?

(b) $\cos x^2$ का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक क्या होगा?

(c) शून्य का समाकल क्या होगा ?

(d) दो रेखाओं $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ तथा $\vec{r}=\vec{c}+\mu\vec{d}$ के लम्बवत् होने का प्रतिबन्ध क्या होगा ?

(e) किसी फलन के मूल ज्ञात करने के लिए समलम्ब चतुर्भुजीय नियम का सूत्र लिखिए।

Give the answer in one sentence:

(a) If $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 5$ and $\theta = 60^o$ then what will be the value of $|\vec{a}\times\vec{b}|$

(b) What is differential coefficient of $\cos x^2$ with respect to x.

(c) What will be the Integration of zero ?

(d) What will be the condition for perpendicularity of two lines $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ and $\vec{r}=\vec{c}+\mu\vec{d}$

(e) Write formula to find roots of a function by Trapezoidal rule.

4. सही जोड़ी बनाइए : **1 × 5 = 5** अंक

स्तम्भ ''अ''	स्तम्भ ''ब''
(a) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx$	(i) $\log (x + \sqrt{x^2-a^2})$
(b) $\int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx$	(ii) $\log \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$
(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx$	(iii) $\frac{1}{2a}\log \frac{x-a}{x+a}, x > a$
(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx$	(iv) $\frac{1}{2a}\log \frac{a+x}{a-x}, x < a$
(e) $\int \sec x\, dx$	(v) $\log (x + \sqrt{x^2+a^2})$

Match the Columns -

Column 'A'	Column 'B'
(a) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx$	(i) $\log (x + \sqrt{x^2-a^2})$

(b) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx$ (ii) $\log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx$ (iii) $\frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a}, x > a$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$ (iv) $\frac{1}{2a} \log \frac{a + x}{a - x}, x < a$

(e) $\int \sec x\, dx$ (v) $\log (x + \sqrt{x^2 + a^2})$

5. खाली स्थानों की पूर्ति कीजिए : **1 × 5 = 5** अंक

(a) e^x का n वाँ अवकलज ....है।

(b) $\int_a^b f(x)\, dx$ के लिए सिम्पसन नियम ....है।

(c) प्रसिद्ध पुस्तक ''वैदिक गणित'' के लेखक का पूरा नाम...........है।

(d) न्यूटन रैफसन विधि से वर्गमूल ज्ञात करने का सूत्र .... है।

(e) यदि $x_0 = 3.5, f(x_0) = 0.25, f'(x_0) = 7$, हो तो न्यूटन–रैफसन विधि से x_1 का मान हैं।

fill in the blanks -

(A) n^{th} derivative of e^x is ....

(B) Simpson's rule for $\int_a^b f(x)\, dx$ is...........

(C) The full name of the writer of famous book "Vedic mathematics" is ....

(D) By newton raphson method the formula is .... for finding the square rootofa.

(E) If $x_0 = 3.5, f(x_0) = 0.25, f'(x_0) = 7$ then by Newton Raphson method the value of x_1 is..........

6. उस गोले का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (2, –3, 4) तथा त्रिज्या 5 है ? **2** अंक

Find the vector and cartesion equation of the sphere whose centre (2, –3, 4) and radius is 5 ?

अथवा / **OR**

उस गोले का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो गोले $|\vec{r} + (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})| = 5$ के संकेन्द्री है और जो इससे दो गुनी त्रिज्या का है।

Find the vector equation of the sphere concentric with the sphere $|\vec{r} + (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})| = 5$ and its radius is two times of that sphere ?

7. यदि $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{j} + \hat{k}$ तब $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ का मान ज्ञात कीजिए ? **2** अंक

If $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{j} + \hat{k}$ then find the value of $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$?

अथवा / **OR**

सिद्ध कीजिए कि–

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

Prove that –

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

8. यदि $\vec{a} = 2\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i}-3\hat{j}-7\hat{k}$ तथा $\vec{c} = -3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ हो तो [$\vec{a}$ + $\vec{b}$ + $\vec{c}$] मान ज्ञात कीजिए। **2** अंक

If $\vec{a} = 2\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i}-3\hat{j}-7\hat{k}$ and $\vec{c} = -3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ then find the value of [$\vec{a}$ + $\vec{b}$ + $\vec{c}$]

अथवा / **OR**

दो सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ का अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

find the scalar product of two vectors $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$?

9. $\int \sin^3 x.\cos^2 x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **2** अंक

Evaluate $\int \sin^3 x.\cos^2 x\, dx$

अथवा / **OR**

$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

10. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। **2** अंक

Evaluate $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$

अथवा / **OR**

सिद्ध कीजिए $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}$

Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}$

11. $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x+1)}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए। **4** अंक

Resolve $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x+1)}$ Into partial fractions.

अथवा / **OR**

$\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए।

Resolve $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$ Into partial fractions.

12. यदि $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 = 1$

If $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ then prove that $x^2 + y^2 = 1$

अथवा / **OR**

समीकरण $\tan^{-1}x + 2\cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$ को हल कीजिए।

Solve the equation $\tan^{-1}x + 2\cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$

13. यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि– **4** अंक

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1+\log_e x)^2}$$

If $x^y = e^{x-y}$ then prove that -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1+\log_e x)^2}$$

अथवा / **OR**

यदि $\log_e(xy) = x^2 + y^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि–

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$$

If $\log_e(xy) = x^2 + y^2$ then prove that -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$$

14. यदि $y = \sin(2\sin^{-1}x)$ हो तो सिद्ध करो कि : **4** अंक

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

If $y = \sin(2\sin^{-1}x)$ then prove that

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

अथवा / **OR**

यदि $y = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिये।

If $y = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ then find $\frac{dy}{dx}$.

15. एक वृत्त की त्रिज्या 2 से.मी. प्रति सेकण्ड की एक समान दर से बढ़ रही है। वृत्त के क्षेत्रफल में वृद्धि किस दर से होगी जबकि उसकी त्रिज्या 8 सेमी. है। **4** अंक

The radius of a circle is increasing at the rate of 2 cm/sec. At what rate is the area increasing when the radius is 8 cm.

अथवा / **OR**

यदि लाभ फलन $P(x) = 41 + 24x - 18x^2$ है, तो कम्पनी द्वारा प्राप्त किया गया उच्चिष्ठ लाभ ज्ञात कीजिए।

If the profit function is $P(x) = 41 + 24x - 18x^2$ then calculate the maximum profit of the company.

16. दो चर राशियों x तथा y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक r हो तो सिद्ध कीजिए कि – **4** अंक

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \sigma_y}$$

जहाँ σ_x^2, σ_y^2 तथा σ_{x-y}^2 क्रमशः x, y तथा $(x - y)$ के विचरण गुणांक हैं।

If r is the coefficient of correlation between two variables x and y then prove that :

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \sigma_y}$$

where σ_x^2, σ_y^2 and σ_{x-y}^2 are variable of x, y and $(x - y)$ respectily.

अथवा / **OR**

निम्नलिखित आँकड़ों से सह–सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए :

x	2	3	5	7	3
y	15	17	4	5	4

Calculate coefficient of correlation from the following data

x	2	3	5	7	3
y	15	17	4	5	4

17. निम्नलिखित आँकड़ों से y का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 70$ तथा सहसम्बन्ध गुणांक 0.8 है ? **4** अंक

	x	y
माध्य	18	100
माध्य विचलन	14	20

Find the value of y from following data, when $x = 70$ and coefficient of correlation is 0.8.

अथवा / **OR**

यदि समाश्रयण रेखाओं के मध्य कोण θ है, तो सिद्ध कीजिए कि,

$$\tan\theta = \frac{\sigma_x.\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\left|\frac{\rho^2 - 1}{\rho}\right|$$

If θ be the angle between the regression line, then prove that

$$\tan\theta = \frac{\sigma_x.\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\left|\frac{\rho^2 - 1}{\rho}\right|$$

18. समतलों $x + 3y + 6 = 0$ तथा $3x - y - 4z = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी मूल बिन्दु से दूरी 1 है **5** अंक

Find the equation of planes possing through the intersection of the planes $x + 3y + 6 = 0$ and $3x - y - 4z = 0$ whose distance from origin is 1.

अथवा / **OR**

समतलों $3x - 4y + 12z = 26$ एवं $2x - y + 2z + 3 = 0$ के बीच न्यून कोण समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the plane bisecting the accute angle between the planes $3x - 4y + 12z = 26$ and $2x - y + 2z + 3 = 0$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ecx - \cot x}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए ? **5** अंक

Evaluate $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ecx - \cot x}{x}$

अथवा / **OR**

$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ की $x = 0$ पर सांतत्य की जाँच कीजिए ?

If $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ than test the continuity at $x = 0$

20. मान ज्ञात कीजिए– **5** अंक

$\int \frac{\sin x + \cos x}{3\sin x + 2\cos x} dx$

Evaluate-

$\int \frac{\sin x + \cos x}{3\sin x + 2\cos x} dx$

अथवा / **OR**

दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ और रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के मध्य परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

Find the area inclosed between the curve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

21. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$ की हल कीजिए। **5** अंक

Solve the differential equation

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$

अथवा / **OR**

अवकल समीकरण $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1}y - x)dy$ को हल कीजिये?

Solve the differential equation $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1}y - x)dy$

22. 52 पत्तों की फेंटी हुई ताश की गड्डी में से 2 पत्ते निकाले जाते हैं। दोनों के लाल या इक्के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ? **5** अंक

Two cards are drawn from a well shuffled pack of 52 cards, find the prabability that both cards are red or ace.

अथवा / **OR**

एक पाँसा दो बार उछाला जाता है प्रत्येक उछाल में सम संख्या आने पर सफलता मानी जाती है। सफलताओं का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

A dice is thrown twice in throw getting even number is taken success, find the probability distribution of the success.

23. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1, –3, 4), (1, –5, 2) और (1, –3, 0) से होकर जाता है तथा जिसका केन्द्र समतल $x + y + z = 0$ पर स्थित है। **6** अंक

Find the equation of the sphere which passes through the points (1, –3, 4), (1, –5, 2) and (1, –3, 0) whose centre lines on the plane $x + y + z = 0$.

अथवा / **OR**

दो बिन्दु A (1, 3, 4) तथा B (1, –2, –1) हैं। एक बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि $3PA = 2PB$ बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि वह एक गोला है।

There are two points A (1, 3, 4) and B (1, –2, –1). A point p moves Such that $3PA = 2PB$ find the locus of P and prove that it is a sphere.

24. सदिश विधि से उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं A (3, 4, –5) तथा B (–2, 1, 4)से समदूरस्थ हैं। **6** अंक

By using vector method find the locus of a point which is equidistant from the points A (3, 4, –5) and B (–2, 1, 4)

अथवा / **OR**

सदिश विधि से सिद्ध कीजिए–

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$

Prove by vector method

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$

कक्षा – **12** वीं

अंक योजना

Mark Dirsbution 2013-14

`हायर सेकेण्डरी — पूर्णांक – 100

विषय : गणित — समय – 3.00 घण्ट

क्र.	इकाई एवं विषय वस्तु	इकाई पर आ. अंक	वस्तुनिष्ठ 1 अंक	अंकवार प्रश्नो की संख्या 2 अंक	4 अंक	5 अंक	6 अंक	कुल प्रश्न
1.	आंशिक भिन्न	5	1	–	1	–	–	1
2.	प्रतिलोम फलन	5	1	–	1	–	–	1
3. 4. 5.	त्रिविमीय ज्यामितीय समतल सरल रेखा एवं गोला	15	4	–	–	1	1	2
6. 7. 8.	सदिश सदिशों का गुणनफल सदिशों का त्रिविमीय ज्या. में अनुप्रयोग	15	3	3	–	–	1	4
9.	फनल, सीमा, सांतत्य	5	–	–	–	1	–	1
10. 11.	अवकलन कठिन अवकलन	10	2	–	2	–	–	2
12.	अवकलन का अनुप्रयोग	5	1	–	1	–	–	1
13. 14. 15.	समाकलन कठिन समाकलन निश्चित समाकलन	15	6	2	–	1	–	3
16.	अवकलन समीकरण	05	–	–	–	1	–	1
17.	सहसंबंध	05	1	–	1	–	–	1
18.	समाश्रयण	05	1	–	1	–	–	1
19.	प्रायिकता	05	–	–	–	1	–	1
20.	आंकिक विधियाँ	05	5	–	–	–	–	–
	योग	100	25	5	7	5	2	19+ **5 = 24**

निर्देश : प्रश्नपत्र निर्माण हेतु विशेष निर्देश

1. प्रश्न क्र. 1 से 5 तक 5 प्रकार के वस्तुनिष्ठ प्रश्न होगें। जिसके अंतर्गत एक शब्द में उत्तर मेंचिग, सही विकल्प तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति के प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न के लिए 1 अंक निर्धारित है। (1 × 5 × 5 = 25) यह प्रश्न प्रत्येक छात्र को हल करना अनिवार्य है।
2. प्रश्न क्र. 6 से 24 प्रत्येक प्रकार के प्रश्नों की उत्तर सीमा नि. होगी

अतिलघुउत्तरीय प्रश्न	02 अंक	लगभग 30 शब्द
लघुउत्तररीय प्रश्न	04 अंक	लगभग 75 शब्द
दीर्घउत्तरीय प्रश्न	05 अंक	लगभग 120 शब्द
दीर्घउत्तरीय प्रश्न	06 अंक	लगभग 150 शब्द
निबंधात्मक प्रश्न	07 अंक	लगभग 250 से 150 शब्द

3. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर शेष सभी प्रश्नों में विकल्प योजना रहेगी।
4. विकल्प के प्रश्न उसी इकाई से, समान कठिनाई स्तर वाले तथा पाठ्यक्रम अनुसार होना चाहिए।
5. कठिनाई स्तर– 40% सरल प्रश्न, 45% सामान्य प्रश्न, 15% कठिन।

आदर्श उत्तर **Set –A**

उच्च गणित

हायर सेकण्डरी परीक्षा–**2013–2014**

खण्ड – 'अ'

Section 'A'

प्र. 1

सही विकल्प : **5 × 1 = 5**

(a) (iii) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$ (b) (i) $\frac{-3\pi}{4}$

(c) (ii) 3 (d) (iii) $\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$

(e) (iv) $\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{-3}{4}\right)$

प्र. 2

हलः सत्य / असत्य **5 × 1 = 5**

(a) असत्य (b) सत्य

(c) असत्य (d) सत्य

(e) सत्य

प्र. 3 **5 × 1 = 5**

हलः (a) $|\vec{a}\times\vec{b}|$ का मान $65\frac{\sqrt{3}}{2}$ होगा। (b) अभीष्ट अवकलन गुणांक $-2x \sin x^2$ होगा

(c) शून्य का समाकलन अचर होगा (d) अभीष्ट प्रतिबन्ध $\vec{b}\cdot\vec{d} = 0$ होगा

(e) समलम्ब चतुर्भुजीय नियम का सूत्र

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + ... y_n)]$$

जहाँ पर $h = \frac{b-a}{n}$

प्र. 4 **5 × 1 = 5**

हलः सही जोड़ी

(a) (iii) $\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}$, $x > a$ (b) (iv) $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}$, $x < a$

(c) (v) $\log (x + \sqrt{x^2 + a^2})$ (d) (i) $\log (x + \sqrt{x^2 - a^2})$

(e) (ii) $\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

प्र. 5 **5 × 1 = 5**

हल: खाली स्थानों की पूर्ति

(a) e^x

(b) $\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4 (y_1 + y_3 + y_5 + ... y_{n-1})$
$+ 2(y_2 + y_4 + y_6 + ... y_{n-2}) + y_n]$

(c) स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ

(d) 0.33794 E–07

(e) 3.4642

खण्ड – 'ब'

Section - 'B'

प्र. 6

हल: सदिश समीकरण के लिए $\vec{c} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

अतः गोले का सदिश समीकरण $|\vec{r} - \vec{c}| = a$ से

$|\vec{r} - (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k})| = 5$ Ans.**1** अंक

कार्तीय समीकरण

सूत्र $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2$ से

यहाँ $(x_1, y_1, z_1) = (2, -3, 4)$ तथा $a = 5$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 5^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 8z + 16 = 25$

अतः $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 4 = 0$ Ans.**1** अंक

अथवा **(Or)**

हल: दिये गोले का समीकरण है–

$|\vec{r} + (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})| = 5$ $\frac{1}{2}$ अंक

$\left|\vec{r}-(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})\right| = 5$ $\frac{1}{2}$ अंक

अतः गोले का केन्द्र $(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ तथा त्रिज्या 5 है

प्रश्नानुसार अभीष्ट गोले का केन्द्र $(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ तथा त्रिज्या (a) 2 × 5 = 10

$|\vec{r}-\vec{c}| = a$ से $\frac{1}{2}$ अंक

$\left|\vec{r}-(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})\right| = 10$

या $\left|\vec{r}+(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k})\right| = 10$ Ans. $\frac{1}{2}$ अंक

प्र. 7

हलः दिया गया है : $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\frac{1}{2}$ अंक

$\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{c} = \hat{j} + \hat{k}$

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ $\frac{1}{2}$ अंक

$\Rightarrow$ 1 (1 + 1) + 2 (2 + 0) + 3 (2 – 0) $\frac{1}{2}$ अंक

= 1 × 2 + 2 × 2 + 3 × 2

= 2 + 4 + 6

= 12 Ans. $\frac{1}{2}$ अंक

अथवा**(Or)**

हलः हम जानते हैं–

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ ....(i)

$\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ ....(ii)

$\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a} - (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ ....(iii)

समीकरण (i) (ii) (iii) के संगत पक्षों को जोड़ने पर

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c}\cdot\vec{a}) + (\vec{c}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

प्र. 8

हल: दिया गया है–

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k}$$ **1** अंक

$$\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

जोड़ने पर $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0\hat{i} - 6\hat{j} + 0\hat{k}$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{0+(-6)^2+0} = \sqrt{6^2} = 6$$ Ans. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

अथवा **(Or)**

हल: $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

$$\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}).\ (3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$$

$$= 2 \times 3 + 1 \times (-1) + (-3) \times (-1)$$ **1** अंक

$\Rightarrow$ $6 - 1 + 3 \Rightarrow 9 - 1 = 8$ Ans. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

प्र 9

हल: माना $\mathrm{I} = \int \sin^3 x\ .\ \cos^2 x\ dx$

$$I = \int \sin^2 x\ .\ \cos^2 x\ .\ \sin x\ dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x\ dx$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$\Rightarrow$ $- \int (1 - t^2)\ t^2\ dt$ मानाकि $\cos x = t$

$\Rightarrow$ $- \int t^2 - t^4\ dt$ $- \cos x = t$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$\Rightarrow$ $- \int t^2\ dt + \int t^4\ dt$ $\sin x\ dx = - dt$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$\Rightarrow$ $- \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5}$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c$ Ans. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

अथवा **(Or)**

हल: $I = \int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

$\Rightarrow \quad = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}.\sin x - \sin\frac{\pi}{4}.\cos x\right)}$

$\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$\Rightarrow \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \text{cosec}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$

$\Rightarrow \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \text{cosec } t \; dt$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

माना $x - \frac{\pi}{4} = t$

$\Rightarrow \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \tan \frac{t}{2}$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$dx = dt$

$\Rightarrow \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$ Ans. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

प्र. 10

हल: $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$

मानाकि $\tan^{-1} x = t$ यदि $x = \sqrt{3}$ तब $t = \frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{1+x^2} dx = dt$ और यदि $x = 0$ तब $t = 0$ **1** अंक

अतः $I = \int_0^{\pi/3} t \; dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi/3}$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{\pi^2}{18}$$ Ans. $\frac{1}{2}$ अंक

अथवा **(Or)**

हल: $$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos} dx \quad ....(i)$$

प्रगुण $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$ से $\frac{1}{2}$ अंक

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$$ $\frac{1}{2}$ अंक

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\ dx \quad ....(ii)$$

समी. (i) एवं (ii) के संगत पक्षों को जोड़ने पर $\frac{1}{2}$ अंक

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$2I = \int_0^{\pi/2} 1\ dx$$

$$2I = [x]_0^{\pi/2}$$

$$2I = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$ Hence Proved $\frac{1}{2}$ अंक

प्र. 11

हल: $$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3(x+1)}$$

मानाकि $x - 1 = y$ या $x = y + 1$ $\frac{1}{2}$ अंक

$$= \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{(y+1)^2 + (y+1) + 1}{y^3[y+1+1]}$$ $\frac{1}{2}$ अंक

$$= \frac{1}{y^3}\left[\frac{y^2+2y+1+y+2}{y+2}\right] = \frac{1}{y^3}\left[\frac{3+3y+y^2}{2+y}\right]$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{3}{2}+\frac{3}{4}y+\frac{1}{8}y^2 \\ \hline 2+y & 3+3y+y^2 \\ & \underline{\overset{-}{3}+\overset{-}{\frac{3}{2}}y} \\ & \frac{3}{2}y+y^2 \\ & \underline{\overset{-}{\frac{3}{2}}y+\overset{-}{\frac{3}{4}}y^2} \\ & \frac{1}{4}y^2 \\ & \underline{\overset{-}{\frac{1}{4}}y^2+\overset{-}{\frac{1}{8}}y^3} \\ & -\frac{1}{8}y^3 \end{array}$$

1 अंक

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{y^3}\left[\frac{3}{2}+\frac{3}{4}y+\frac{1}{8}y^2-\frac{1/8\,y^3}{2+y}\right]$$ **1** अंक

$$= \frac{3}{2y^3}+\frac{3}{4y^2}+\frac{1}{8y}-\frac{1}{8(2+y)}$$ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ अंक

y का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$= \frac{3}{2(x-1)^3}+\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)} \text{ Ans.}$$ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ अंक

अथवा **(OR)**

हल: दिया गया $\frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$

जोकि विषम भिन्न है

उचित भिन्न में बदलने के लिए

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x^2+2x-3 & 2x^2+5x-11 \\ & \underline{\overset{-}{2x^2}+\overset{-}{4x}-\overset{+}{6}} \\ & x-5 \end{array}$$

$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ अंक

अतः $\dfrac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3} = 2 + \dfrac{x-5}{x^2+2x-3}$ **$\frac{1}{2}$** अंक

$= 2 + \dfrac{x-5}{(x-1)(x+3)}$

मानाकि $\dfrac{x-5}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+3}$ **$\frac{1}{2}$** अंक

अतः $A = \left[\dfrac{x-5}{x+3}\right]_{x=1} = \dfrac{1-5}{1+3} = \dfrac{-4}{4} = -1$

$B = \left[\dfrac{x-5}{x-1}\right]_{x=-3}$ **$\frac{1}{2}$** अंक

$= \left[\dfrac{-3-5}{-3-1}\right] = \dfrac{-8}{-4} = 2$

अतः $\dfrac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3} = 2 + \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{2}{x+3}$ **$1\frac{1}{2}$** अंक

$= 2 - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+3}$ Ans. **$\frac{1}{2}$** अंक

प्र. 12

हल: $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \dfrac{\pi}{2}$

$\sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}y$

$\sin^{-1}x = \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}y$ {using formula}**1** अंक

$\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left[\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-1}\right]$ **1** अंक

$\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left[\sqrt{1-y^2} - y\times 0\right]$

$\sin^{-1}x = \sin^{-1}\left[\sqrt{1-y^2}\right]$

$x = \sqrt{1-y^2}$ **1** अंक

वर्ग करने पर $x^2 = 1 - y^2$

या $x^2 + y^2 = 1$ Hence proved **1** अंक

अथवा **(Or)**

प्र. 12

हल: दिया गया $\tan^{-1}x + 2\cot^{-1}x = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x + \cot^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3} \qquad \left\{\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow = \cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$$ **1** अंक

$$\Rightarrow \cot^{-1}x = \frac{4\pi - 3\pi}{6}$$ **1** अंक

$$\Rightarrow \cot^{-1}x = \frac{\pi}{6}$$ **1** अंक

$$x = \cot\frac{\pi}{6}$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$x = \sqrt{3}$$ Ans. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

प्र. 13

हल: दिया गया है $x^y = e^{x-y}$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log x^y = \log e^{x-y}$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$y \log x = (x - y) \log e \qquad \log e = 1$$

$$y \log x = x - y$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$y \log x + y = x$$

$$y(\log x + 1) = x$$

$$y = \frac{x}{1+\log x}$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x)\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}(1+\log x)}{(1+\log x)^2}$$ **1** अंक

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\log x - \frac{1}{x}\times x}{(1+\log x)^2}$$ **1** अंक

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$ Hance proved $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

अथवा **(Or)**

प्र. 13

हलः दिया गया $\log (x\, y) = x^2 + y^2$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$\log x + \log y = x^2 + y^2$$

$$\log y - y^2 = x^2 - \log x$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\log y - \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}\log x$$ $\mathbf{1\frac{1}{2}}$ अंक

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} - 2y.\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{1}{x}$$

$$\left[\frac{1}{y} - 2y\right]\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2-1}{x}$$

$$\frac{1-2y^2}{y}\times\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2-1}{x}$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2-1}{x}\times\frac{y}{1-2y^2}$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left[\frac{2x^2-1}{1-2y^2}\right]$$ Hance proved $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

प्र. 14

हलः दिया गया है $y = \sin (2 \sin^{-1}x)$

$$\sin^{-1}y = 2 \sin^{-1}x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx} . \sin^{-1} y = 2. \frac{d}{dx} \sin^{-1} x$$ **$1\frac{1}{2}$** अंक

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$ **1** अंक

$$\frac{dy}{dx} = 2. \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$ **$\frac{1}{2}$** अंक

अतः $$\frac{dy}{dx} = \sqrt[2]{\frac{1-y^2}{\sqrt{1-x^2}}}$$ Hance proved **$\frac{1}{2}$** अंक

अथवा **(Or)**

हल: दिया गया $$y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$$

मानाकि $x = \tan\theta$ तब $\theta = \tan^{-1} x$ **2** अंक

$$y = \tan^{-1} \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \tan^{-1} \tan 2\theta$$

$$y = 2\theta$$

$$y = 2 \tan^{-1} x$$ **1** अंक

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

अतः $$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$ Ans.**1** अंक

प्र. 15

हल: माना कि किसी समय t पर वृत्त की त्रिज्या r तथा क्षेत्रफल A है, तब

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$ **1** अंक

प्रश्नानुसार

त्रिज्या में परिवर्तन की दर 2 सेमी./सेकण्ड

अतएव $\frac{dr}{dt} = 2$ cm/sec.

अतः वृत्त के क्षेत्रफल में वृद्धि दर

$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt}$ **1** अंक

$= 2\pi r \times 2$ [मान प्रतिस्थापित

$= 4\pi r$ $\frac{1}{2}$ अंक

$r = 8$ पर $\frac{dA}{dt} = 4\pi \times 8$

$= 32\pi$ सेमी.^{2}/सेकण्ड $\frac{1}{2}$ अंक

अथवा

(Or)

हलः $p(x) = 41 + 24x - 18x^2$

$p'(x) = 0 + 24 - 36x = 24 - 36x$ $\frac{1}{2}$ अंक

$p''(x) = -36 < 0$ ऋणात्मक $\frac{1}{2}$ अंक

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ लाभ के लिए

$p'(x) = 0$

$24 - 36x = 0$

$x = 2/3$ **1** अंक

अब $x = 2/3$ पर $p''(x)$ मान $-36 < 0$ ऋणात्मक $\frac{1}{2}$ अंक

लाभ उच्चिष्ठ होगा जब $x = 2/3$ $\frac{1}{2}$ अंक

अतः उच्चिष्ठ लाभ $P\left(\frac{2}{3}\right) = 41 + 24\left(\frac{2}{3}\right) - 18\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\frac{1}{2}$ अंक

$= 41 + 16 - 8$

$= 49$ Ans. $\frac{1}{2}$ अंक

प्र. 16

हलः हम जानते हैं–

$$\sigma^2_{x-y} = \frac{1}{n}\Sigma\,[(x-y)-(\bar{x}-\bar{y})]^2$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma\,[(x-\bar{x})-(y-\bar{y})]^2$$

$$\sigma^2_{x-y} = \frac{1}{n}\Sigma\,[(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2-2(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})]$$

$\frac{1}{2}$ अंक

$$= \frac{1}{n}\Sigma\,(x-\bar{x})^2+\frac{1}{n}\Sigma\,(y-\bar{y})^2-2\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})$$

$$\sigma^2_x+\sigma^2_y-2r\,\sigma_x\,\sigma_y \qquad \left[r=\frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\,\sigma_x\sigma_y}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2r\,\sigma_x\,\sigma_y = \sigma^2_x+\sigma^2_y-\sigma^2_{x-y}$$

1 अंक

$$r = \frac{\sigma^2_x+\sigma^2_y-\sigma^2_{x-y}}{2\,\sigma_x\sigma_y} =$$

Ans. **1** अंक

अथवा **(Or)**

हलः

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
2	15	–2	6	–12	4	36
3	17	–1	8	–8	1	64
5	4	1	–5	–5	1	25
7	5	3	–4	–12	9	16
3	4	–1	–5	5	1	25
$\Sigma x = 20$	$\Sigma y = 45$			$\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y}) = -32$	$\Sigma\,(x-\bar{x})^2 = 16$	$\Sigma\,(y-\bar{y})^2 = 166$

2 अंक

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{20}{5} = 4 \text{ तथा } \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{45}{5} = 9$$ $\frac{1}{2}$ अंक

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x}).(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}.\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$ 1 अंक

$$= \frac{-32}{\sqrt{16}\sqrt{166}} = \frac{-32}{4\times 12.8841} = \frac{-32}{51.5364}$$

$$= -0.62$$ Ans. $\frac{1}{2}$ अंक

प्र. 17

हल: दिया गया है– $\bar{x} = 18$, $\bar{y} = 100$

$\sigma_x = 14$, $\sigma_y = 20$ तथा $r = 0.8$

y की x पर समाश्रयण रेखा–

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$ 1 अंक

$$y - 100 = 0.8 \times \frac{20}{14}(x - 18)$$ $\frac{1}{2}$ अंक

$$y = \frac{16}{14}(x - 18) + 100$$

$x = 70$ होने पर $\frac{1}{2}$ अंक

$$y = \frac{16}{14}(70 - 18) + 100$$ 1 अंक

$$= \frac{8}{7}(52) + 100$$ $\frac{1}{2}$ अंक

$$= 59.42 + 100$$

$$= 159.42$$ Ans. 1 अंक

अथवा**(Or)**

हल: y की x पर समाश्रयण रेखा का समीकरण

$$y - \bar{y} = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

प्रवणता $m_1 = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ **1** अंक

तथा x की y पर समाश्रयण रेखा

$$x - \bar{x} = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(y - \bar{y})$$

या $y - \bar{y} = \frac{1}{p}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ **1** अंक

इस रेखा की प्रवणता $m_2 = \frac{\sigma_y}{p\sigma_x}$

यदि दोनों रेखाओं के मध्य न्यून कोण θ है तब

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$ **1** अंक

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x} - \frac{\sigma_y}{r\,\sigma_x}}{1 + \frac{p\,\sigma_y}{\sigma_x} \times \frac{\sigma_y}{r\,\sigma_x}}\right| = \left|\frac{\frac{(r^2-1)\sigma_y}{r\,\sigma_x}}{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2}}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\frac{(r^2-1)\sigma_x\sigma_y}{p\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right)}\right|$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$\tan\theta = \frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\left|\frac{r^2 - 1}{r}\right|$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

Ans.

प्र. 18

हल: दिये गये समतल $x + 3y + 6 = 0$

एवं $3x - y - 4z = 0$

के प्रतिच्छेदन से जाने वाले समतल का समीकरण

$$(x + 3y + 6) + \lambda(3x - y - 4z) = 0$$ ....(i) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$x(1 + 3\lambda) + y(3 - \lambda) - 4\lambda z + 6 = 0$$ ....(ii) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

इस समतल पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई

$= 1$ $\frac{1}{2}$ अंक

$$= \frac{(1+3\lambda)\times 0+(3-\lambda)\times 0-4\lambda\times 0+6}{\sqrt{(1+3\lambda)^2+(3-\lambda)^2+(-4\lambda)^2}} = 1$$

$$= \frac{6}{\sqrt{1+9\lambda^2+6\lambda+9-6\lambda+\lambda^2+16\lambda^2}} = 1$$

$$= \frac{6}{\sqrt{26\lambda^2+10}} = 1$$

$$= \sqrt{26\lambda^2+10} = 6$$ $\frac{1}{2}$ अंक

वर्ग करने पर

$\Rightarrow \quad 26\lambda^2 + 10 = 36$

$\Rightarrow \quad 26\lambda^2 = 36 - 10$

$\Rightarrow \quad 26\lambda^2 = 26$

$\Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{26}{26}$

$\lambda^2 = 1$ या $\lambda = \pm 1$ $\frac{1}{2}$ अंक

समीकरण (2) में $\lambda = 1$ रखने पर

$x(1+3) + y(3-1) - 4z + 6 = 0$

$4x + 2y - 4z + 6 = 0$

या $2x + y - 2z + 3 = 0$ **1** अंक

समीकरण (2) में $\lambda = -1$ रखने पर $\frac{1}{2}$ अंक

$x(1-3) + y(3+1) + 4z + 6 = 0$

$-2x + 4y + 4z + 6 = 0$

$-x + 2y + 2z + 3 = 0$

या $x - 2y - 2z - 3 = 0$ $\frac{1}{2}$ अंक

अभीष्ट समीकरण

$$2x + y - 2z + 3 = 0$$

$$x - 2y - 2z - 3 = 0$$ Ans. $\frac{1}{2}$ अंक

अथवा **(Or)**

हल: दिये गये समतल $3x - 4y + 12z = 26$ ....(i)

एवं $2x - y + 2z + 3 = 0$ ....(ii)

के कोणार्द्धकों के समीकरण के लिए समीकरण (i) को परिवर्तित कर लिखने पर

$$-3x + 4y - 12z + 26 = 0$$

तथा $2x - y + 2z + 3 = 0$ **1** अंक

अतः कोणार्द्धक के समीकरण

$$= \frac{-3x+4y-12z+26}{\sqrt{(-3)^2+4^2+(-12)^2}} = \pm \frac{2x-y+2z+3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$ **1** अंक

$$= \frac{-3x+4y-12z+26}{\sqrt{9+16+144}} = \pm \frac{2x-y+2z+3}{\sqrt{4+1+4}}$$

$\Rightarrow$ $= 3[-3x + 4y - 12z + 26] = \pm 13[2x - y + 2z + 3]$

$\Rightarrow$ $= -9x + 12y - 36z + 78 = \pm [26x - 13y + 26z + 39]$

(+) चिन्ह लेने पर

$$-9x + 12y - 36z + 78 = 26x - 13y + 26z + 39$$

$$-9x - 26x + 12y + 13y - 36z - 26z + 78 - 39 = 0$$

$$-35x + 25y - 62z + 39 = 0$$

या $35x - 25y + 62z - 39 = 0$ ....(iii) $\frac{1}{2}$ अंक

(–) चिन्ह लेने पर

$$-9x + 12y - 36z + 78 = -26x + 13y - 26z - 39$$

$$-9x + 26x + 12y - 13y - 36z + 26z + 78 + 39 = 0$$

$17x - y - 10z + 117 = 0$ ....(iv) $\frac{1}{2}$ अंक

समतल (ii) एवं (iv) के बीच

$$\cos\theta = \frac{2\times 17 + (-1)(-1) + (2)(-10)}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{289+1+100}}$$ $\frac{1}{2}$ अंक

$$= \frac{34+1-20}{3\times\sqrt{390}} = \frac{15}{3\sqrt{390}} = \frac{5}{\sqrt{390}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\frac{25}{390}} = \sqrt{\frac{390-25}{390}} = \sqrt{\frac{365}{390}}$$

$$= \frac{\sqrt{365}}{\sqrt{390}}$$ **$\frac{1}{2}$** अंक

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{365}}{\sqrt{390}} \times \frac{\sqrt{390}}{5}$$

$$= \sqrt{\frac{365}{25}} = \sqrt{\frac{73}{5}} = \sqrt{14.6}$$ **$\frac{1}{2}$** अंक

$\tan\theta > 1,\ \theta > \frac{\pi}{4}$

अतः न्यून कोण का अर्द्धक

$$35x - 25y + 62z - 39 = 0$$ Ans.

प्र. 19

हलः $\lim_{x\to 0} \frac{\text{cosec } x - \cot x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x.\sin x}$$ **1** अंक

$$\lim_{x\to 0} \frac{\not{2}\sin^{\not{2}}\frac{x}{2}}{x\times\not{2}.\not{s}in\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x.\cos\frac{x}{2}}$$ **2** अंक

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan\frac{x}{2}}{2\times\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} as\ x \to 0 \\ \frac{x}{2} \to 0 \end{bmatrix}$$ **1** अंक

अथवा **(Or)**

हल: (i) $f(0) = \frac{1}{2}$ R.H. limit

(ii) R.H.L. $f(0+0) = \lim_{h\to 0} f(0+h)$ **1** अंक

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(0+h)}{(0+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cosh}{h^2}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h^2} = 2 \lim_{h\to 0} \left(\frac{\int m \frac{h}{2}}{h_2} \right) \times \frac{1}{4}$

$\Rightarrow 2 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

(iii) L.H. limit

$f(0-0) = \lim_{h\to 0} f(0+h)$ **1** अंक

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(0-h)}{(0-h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2}$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h^2} = \frac{1}{2}$ **1** अंक

चूँकि $f(0+0) = f(0) = f(0-0)$ **1** अंक

अतः दिया गया फलन $x = 0$ पर सांतत्य है।

प्र. 20

हल: $\int \frac{\sin x + \cos x}{3\sin x + 2\cos x} dx$

मानाकि $\sin x + \cos x = A \frac{d}{dx}(3\sin x + 2\cos x) + B(3\sin x + 2\cos x)$

$\sin x + \cos x = A(3\cos x - 2\sin x) + B(3\sin x + 2\cos x)$

1 अंक

$\sin x + \cos x = (-2A + 3B)\sin x + (3A + 2B)\cos x$

तुलना करने पर $-2A + 3B = 1$

$3A + 2B = 1$

$$-6A + 9B = 3$$
$$+6A + 4B = 2$$

जोड़ने पर $13B = 5$

$B = 5/13$

तब $3A + 2\left(\frac{5}{13}\right) = 1$

$$3A = 1 - \frac{10}{13} = \frac{3}{13}$$

$A = 1/13$ **$\frac{1}{2}$** अंक

अत: $\int \frac{\sin x + \cos x}{3\sin x + 2\cos x}\, dx = \int \frac{3\cos x - 2\sin x}{13(3\sin x + 2\cos x)} dx + \int \frac{5(3\sin x + 2\cos x}{13(3\sin x + 2\cos x)} dx$

1 अंक

$= \int \frac{3\cos x - 2\sin x}{13(3\sin x + 2\cos x)} dx + \int \frac{5}{13} dx$ **1** अंक

मानाकि $3\sin x + 2\cos x = t$

$(3\cos x - 2\sin x)\, dx = dt$

$$I = \frac{1}{13}\int \frac{1}{t} dt + \frac{5}{13}\int dx$$

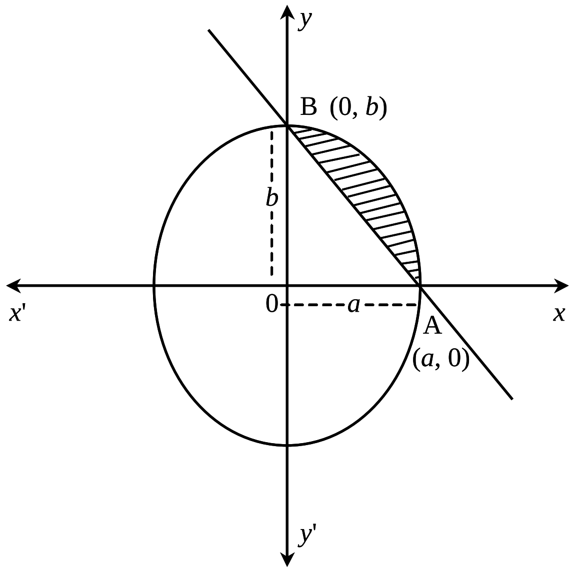
$\Rightarrow \frac{1}{13}\log t + \frac{5}{13}x$ **$\frac{1}{2}$** अंक

$\Rightarrow \frac{1}{13}\log (3\sin x + 2\cos x) + \frac{5}{13}x + c$

Ans. **$\frac{1}{2}$** अंक

अथवा **(Or)**

हल:



दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ....(i)

रेखा $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ....(ii)

स्पष्टतः दीर्घवृत्त (i) का केन्द्र (0, 0) अक्षों की लम्बाईयाँ $2a$ और $2b$ है।

दीर्घवृत्त (i) और रेखा (ii) मध्य परिबद्ध क्षेत्र को चित्र में छायांकित किया गया है।

अभीष्ट क्षेत्रफल = दीर्घवृत्त के चतुर्थांश OAB का क्षेत्रफल $- \Delta AOB$ का क्षेत्रफल **1** अंक

$$= \int_0^a y\, dx - \frac{1}{2}\, OA \times OB$$ **1** अंक

$$= \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx - \frac{1}{2}\, ab$$ **1** अंक

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a - \frac{1}{2}\, ab$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2} a\sqrt{a^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{2}\right] - \left[0 + \frac{1}{2}\sin^{-1} 0\right] - \frac{1}{2}\, ab$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1} 1\right] - \frac{1}{2}\, ab$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{a^2}{2} . \frac{\pi}{2}\right] - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}(\pi - 2)$$ Ans. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

प्र. 21

हलः $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x+y+3} \quad \text{....(i)}$$

$x + y = v$ रखने पर

$$\frac{d}{dx}(x + y) = \frac{dv}{dx}$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$ **1** अंक

समी. (i) में मान रखने पर

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v-3}{v+3}$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{v-3}{v+3} = \frac{v+3+v-3}{v+3}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{v+3}$$ **1** अंक

$$\frac{v+3}{2v}\, dv = dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर **1** अंक

$$\int \frac{v+3}{2v} dv = \int dx$$

$$\int \frac{1}{2} + \frac{3}{2v}\, dv = \int dx$$ **1** अंक

$$\frac{1}{2}v + \frac{3}{2}\log v = x + c$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$\frac{v+3\log v}{2} = x + c$$

v का मान रखने पर $x + y + 3\log(x + y) = 2x + 2c$

$$y + 3\log(x + y) = x + c$$ Ans.

अथवा **(Or)**

हलः $$(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)\, dy$$

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$$

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} + x = \tan^{-1} y$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{1+y^2}\right)x = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$ **1** अंक

$\frac{dx}{dy} + px = Q$ से तुलना करने पर

$$p = \frac{1}{1+y^2}, \; Q = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$ **1** अंक

$$\text{I.F.} = e^{\int p dy} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy}$$

$$= e^{\tan^{-1} y}$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

अभीष्ट हल

$$x\,(\text{I.F.}) = \int Q.\,(\text{I.F.})\,dy + c$$

$$x \,.\, e^{\tan^{-1} y} = \int \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}\, e^{\tan^{-1} y}\, dy + c$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$x \,.\, e^{\tan^{-1} y} = \int t \,.\, e^t\, dt + c$$ $\left[\begin{array}{l}\tan^{-1} y = t \\ \frac{dy}{1+y^2} = dt\end{array}\right.$ **1** अंक

$$x \,.\, e^{\tan^{-1} y} = t \,.\, e^t - \int 1.\, e^t\, dt + c$$

$$x \,.\, e^{\tan^{-1} y} = t \,.\, e^t - e^t + C$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

मान रखने पर

$$x \,.\, e^{\tan^{-1} y} = \tan^{-1} y\; e^{\tan^{-1} y} - e^{\tan^{-1} y} + c$$

$$x = \tan^{-1} y - 1 + C \quad e^{\tan^{-1} y}$$ Ans. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

प्र 22

हल: दोनों पत्तों के लाल होने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{{}^{26}c_2}{{}^{52}c_2} \qquad \textbf{1} \text{ अंक}$$

$$= \frac{\frac{26\times25}{2\times1}}{\frac{52\times51}{2\times1}} = \frac{13\times25}{26\times51} = \frac{325}{1326}$$

दोनों पत्तों के इक्के होने की प्रायिकता

$$P(B) = \frac{{}^{4}c_2}{{}^{52}c_2} = \frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{52\times51}{2\times1}} = \frac{6}{1326} \qquad \textbf{1} \text{ अंक}$$

दो लाल इक्के होने की प्रायिकता

$$P(A\cap B) = \frac{{}^{2}c_2}{{}^{52}c_2} = \frac{1}{1326} \qquad \textbf{1} \text{ अंक}$$

अभीष्ठ प्रायिकता

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \qquad \textbf{1} \text{ अंक}$$

$$= \frac{325}{1326} + \frac{6}{1326} - \frac{1}{1326} = \frac{330}{1326} \qquad \mathbf{\frac{1}{2}} \text{ अंक}$$

$$= \frac{55}{221} \text{ Ans.} \qquad \mathbf{\frac{1}{2}} \text{ अंक}$$

अथवा **(Or)**

हल: पाँसे को एक बार उछालने पर सम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{1} \text{ अंक}$$

सम संख्या प्राप्त न करने की प्रायिकता

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{1} \text{ अंक}$$

यदि यादृच्छिक चर x हो, तो $x = 0, 1, 2$

$P_1 = P\,(x = 0) \;=\; P(A, \overline{A}) = P(A)\,P(\overline{A})$ **1** अंक

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P_2 = P\,(x = 1) \;=\; P(A, \overline{A}$ या $\overline{A}\,A)$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$= P(A, \overline{A}) + P(\overline{A}\,A)$

$= P(A)\,.\,P(\overline{A}) + P(\overline{A})\,.\,P(A)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$P_3 = P\,(x = 2) \;=\; P(AA) = P(A)\,P(A)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

अभीष्ट प्रायिकता बंटन

X_i	0	1	2
P	¼	½	¼

Ans. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

प्र. 23

हल: माना अभीष्ट गोले की समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ....(i)**1** अंक

चूँकि यह गोला बिन्दु (1, –3, 4) से गुजरता

$2u - 6v + 8w + d = -26$ ....(ii)**1** अंक

इसी प्रकार गोला (i) बिन्दुओं (1, –5, 2) तथा (1, –3, 0) से गुजरता है। अतः

$2u - 10v + 4w + d + 30 = 0$ ....(iii)

तथा $2u - 6v + d + 10 = 0$ ....(iv)$\mathbf{1\frac{1}{2}}$ अंक

समीकरण (ii), (iii) तथा (iv) को हल करने पर–

$u = -1,\ v = 3,\ w = -2$ तथा $d = 10$ **2** अंक

मान समीकरण (i) में रखने पर

अभीष्ट समीकरण

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 4z + 10 = 0$ Ans. $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

अथवा

(Or)

हल: मानाकि चर बिन्दु $P(\alpha, \beta, \gamma)$ है

प्रश्नानुसार $3PA = 2PB$

$9PA^2 = 4\,PB^2$ **$\frac{1}{2}$** अंक

$9[(\alpha - 1)^2 + (\beta - 3)^2 + (\gamma - 4)^2] =$

$4\,[(\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 + (\gamma + 1)^2]$ **$\frac{1}{2}$** अंक

$9[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 6\beta - 8\gamma + 26]$

$= 4\,[(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha + 4\beta + 2\gamma + 6]$ **1** अंक

$9\alpha^2 - 4\alpha^2 + 9\beta^2 - 4\beta^2 + 9\gamma^2 - 4\gamma^2 - 18\alpha + 8\alpha - 54\beta - 16\beta - 72\gamma - 8\gamma + 234 - 24 = 0$

$1\frac{1}{2}$ अंक

$= 5\alpha^2 + 5\beta^2 + 5\gamma^2 - 10\alpha - 70\beta - 80\gamma + 210 = 0$

$1\frac{1}{2}$ अंक

अभीष्ट बिन्दु पथ

$= 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 10x - 70y - 80z + 210 = 0$

$1\frac{1}{2}$ अंक

या $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 14y - 16z + 42 = 0$

यह एक गोला है चूँकि

(i) x^2, y^2, z^2 के गुणांक समान हैं **$\frac{1}{2}$** अंक

(ii) xy, yz, zx के पद नहीं है **$\frac{1}{2}$** अंक

(iii) यह x, y, z की द्विघातीय समीकरण है Hence Proved

प्र. 24

हल: मानाकि बिन्दु $\bar{p} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$

दिये गये बिन्दु

$\bar{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + (-5)\hat{k}$ **1** अंक

$$\overline{B} = -2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\overline{AP} = p.v. \text{ of } p - p.v. \text{ of } A$$

$$= (\alpha - 3)\hat{i} + (\beta - 4)\hat{j} + (\gamma + 5)\hat{k}$$ **1** अंक

$$\overline{BP} = (\alpha + 2)\hat{i} + (\beta - 1)\hat{j} + (\gamma - 4)\hat{k}$$

प्रश्नानुसार $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$

$$\sqrt{(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2+(\gamma+5)^2} = \sqrt{(\alpha+2)^2+(\beta-1)^2+(\gamma-4)^2}$$ **1** अंक

वर्ग करने पर

$$(\alpha - 3)^2 + (\beta - 4)^2 + (\gamma + 5)^2 = (\alpha - 2)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma + 4)^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 6\alpha - 8\beta + 10\gamma + 50$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\alpha - 2\beta - 8\gamma + 21$$ **1** अंक

$$- 6\alpha - 4\alpha - 8\beta + 2\beta - 10\gamma + 8\gamma + 41 - 21 = 0$$

$$- 10\alpha - 6\beta + 18\gamma + 29 = 0$$

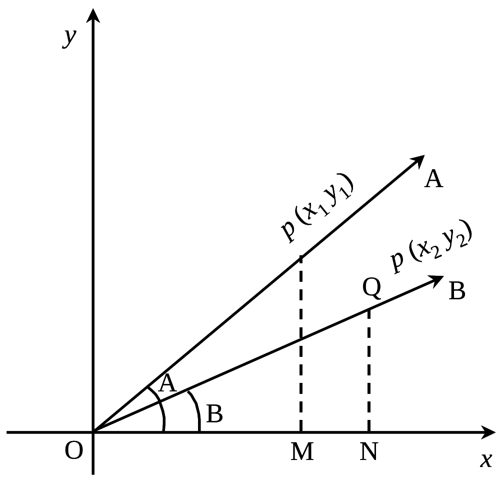
$\frac{1}{2}$ अंक

अभीष्ट बिन्दु पथ

$$10x + 6y - 18z - 29 = 0$$ Ans. $\frac{1}{2}$ अंक

अथवा / **(Or)**

हल:



2 अंक

माना OX के अनुदिश मात्रक सदिश $\hat{i}$ तथा OY के अनुदिश मात्रक $\hat{j}$ है

$$\angle AOX = \angle A, \angle BOX = \angle B$$

तब $\angle AOB = \angle A - \angle B$

चित्रानुसार $\overline{OM} = x_1 \quad \overline{MP} = y_1$

$\overline{OM} = i\, x_1 \quad \overline{MP} = \hat{j}\, y_1$

ΔOPM में

$$\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP}$$

$$\overline{OP} = i\, x_1 + \hat{j}\, y_1$$ **1** अंक

$$\cos A = \frac{OM}{OP} = \frac{x_1}{1}$$

$$\sin A = \frac{MP}{OP} = \frac{y_1}{1}$$

$$\overline{OP} = \hat{i} \cos A + \hat{j} \sin A$$ **1** अंक

इसी प्रकार $\overline{OQ} = \hat{i} \cos B + \hat{j} \sin B$

$$\overline{OQ} \times \overline{OP} = (\hat{i} \cos B + \hat{j} \sin B) \times (\hat{i} \cos A + \hat{j} \sin A)$$ **1** अंक

$$= |\overline{OQ}| \,.\, |\overline{OP}| \sin (A - B)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos B & \sin B & 0 \\ \cos A & \sin A & 0 \end{vmatrix}$$ $\mathbf{\frac{1}{2}}$ अंक

$$= 1 \times 1 \sin (A - B)\hat{k} = \hat{k}(\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$

अतः $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$